دراسة شروط إستقرارية أنموذج STSechAR مع التطبيق

أ.م.د.ازهر عباس محمد الحيالي
كلية التربية للعلوم الصرفة/ جامعة تكريت

عبد الله محمود حسين العبيدي
كلية التربية للعلوم الصرفة/ جامعة تكريت

Stability conditions study of STSechAR Model with application

Assis.Prof. Dr. Azhar A. Mohamed
College of Education/ Tikreet uni.

Abdullah M. Hussain
College of Education/ Tikreet uni.

تاريخ استلام البحث ٢٠١٤/١٢/١ تاريخ قبول النشر ٢٠١٥/١٢/٣

الملخص

في هذا البحث تم دراسة شروط استقرارية أنموذج متسلسلات زمنية لا خطية مقترح، وهو أنموذج دالة القاطع الزائدية ذو الانتقال الأملس للانحدار الذاتي STSe chAR. وتم استخدام طريقة التقريب بالخطية المحلية التي تعتمد أساسا" على دراسة شروط استقرارية الأنموذج عند جوار النقطة المنفردة غير الصفرية للأنموذج اللاخطي لتقريبه الى أنموذج انحدار ذاتي خطي. كذلك تم إيجاد شروط استقرارية دورة النهاية (إن وجدت) لهذا الأنموذج. وتم تطبيق النتائج النظرية التي توصلنا اليها في هذا البحث على بيانات حقيقية خاصة بالمعدلات الشهرية لدرجات الحرارة في مدينة كركوك للسنوات (٢٠٠٠-٢٠١٣) م.

الكلمات المفتاحية: الانحدار الذاتي غير خطي، شروط الأستقرارية، النقطة المنفردة غير صفرية، دورة النهاية.

Abstract:

In this paper we study stability conditions of a non-linear times series model which we proposed and named as smooth transition secant hyperbolic Autoregressive model (STSechAR).We use a local linearization technique which depends essentially in studing stability in the neighborhood of anon zero singular point of the model in order to approximate the proposed model to a linear Autoregressive model (AR) . In addition we study and find a stability conditions of a limit cycle (if exists) for the proposed model . We apply a theoritical results which we obtain in this paper to a real data which represent a monthly mean temperature in Kirkuk city for the years (2000-2013) AC .

Key word: non-linear Autoregressive, Stability Conditions, non-zero Singular point, Limit cycle.

١ – المقدمة:

يُعَدَّ موضوع المتسلسلات الزمنية من الموضوعات الواسعة، وقد ازداد اتساعه في العقود الأخيرة بشكل كبير نظراً لكثرة التطبيقات المستخدمة في الهندسة والاتصالات والأنواء الجوية والطب ...الخ. فضلاً عن ذلك فإنَّ الطبيعة اللاخطية لمعظم الظواهر الفيزيائية كالاهتزازات العشوائية والتذبذب اللاخطي تحتم أن تكون النماذج الرياضية لها غير خطية لتكون الأقرب إلى الواقع ولُتعطِ تفسيرات أدق من النماذج الخطية فضلاً عن ذلك فإنَّ هذه النماذج تظهر خصائص هذه الطبيعة اللاخطية بشكل واضح ومن أهم الخصائص اللاخطية هي:

1- ظاهرة القفز (jump phenomina) والتي تظهر بشكل جلي في معادلة دفنك (Duffingėquations).

$$\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + \alpha x(t) + \beta\, x^3(t) = F\cos wt \quad \ldots\ldots\ldots(1.1)$$

حيث α وβ وc ثوابت و$F\cos wt$ هي القوة الخارجية المؤثرة على التذبذب وw هو التردد (frequency) وt الزمن. يمثل العامل $c\dot{x}(t)$ قوة تضاؤل (damping force) التذبذب والعامل $\alpha x(t) + \beta x^3(t)$ يمثل قوة استعادة (restoring force) التذبذب اللاخطي و إن القوة الخارجية تؤثر على التذبذب بسعة (Amplitude) F وتردد w (Tong,1990).

2- الاعتمادية بين سعة الموجة والتردد(Amplitude –dependent frequency) والتي تظهر بشكل واضح من معادلة دفنك

3- وجود سلوك دورة النهاية (limit cycle behavior) وهذا السلوك تتميز به معادلة فان در بول (van der pol equation) الآتية:

$$\ddot{x}(t) - \beta[1 - x^2(t)]\dot{x}(t) + \alpha x(t) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots(1.2)$$

نلاحظ أن الجزء اللاخطي من المعادلة (1.2) هو الحد الذي يحوي على المشتقة الأولى بالنسبة للزمن $\dot{x}(t)$ والذي يلعب دوراً فعالا" في إستقرارية المعادلة ولهذا السبب فقد اعتمد العالم اوزاكي(Ozaki) في بناء الأنموذج الذي اقترحه على x_{t-1} فضلاً عن ذلك فإنَّ هذا المتغير يقابل العامل$\dot{x}(t)$ الذي يمثل قوة التضاؤل في معادلة دفنك (1.1) وهو نفس العامل الذي يحدد أو يحجم مقدار القفز (Hagganand Ozaki , 1980),(Ozaki, 1980)(Tong,1990).

إنَّ الاهتزازات العشوائية اللاخطية يعبر عنها بمعادلة دفنك الآتية

$$\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + \alpha x(t) + \beta x^3(t) = n(t) \quad \ldots\ldots\ldots(1.3)$$

بحيث أن$n(t)$ هي عملية الإزعاج الأبيض بالزمن المستمر ويمكن إعادة كتابة المعادلة التفاضلية التصادفية (1.1)(stochastic differential equation) بالشكل الاتي:

$$\ddot{x}(t) + g_1\big(x(t)\big).\dot{x}(t) + g_2\big(x(t)\big).x(t) = n(t) \quad \ldots.(1.4)$$

إذ g_1 وg_2 تمثلان دالتان لا خطيتان و $\dot{x}(t)=y(t)$ و$n(t)$ عملية إزعاج أبيض . عندما يتم تقريب g_1 وg_2 بثوابت c وα على التواليف إننا نحصل على المعادلة التفاضلية التصادفية الآتية:

$$\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + \alpha x(t) = n(t) \quad \ldots\ldots\ldots(1.5)$$

إذ يسمى المعامل c بمعامل الاضمحلال او التضاؤل (damping coefficient) و α يسمى معامل الإعادة (restoring coefficient) للتذبذب اللاخطي. إن كلاً من cوα يعتمد على الطبيعة الفيزياوية للمسألة قيد الدراسة عندما تكون القوة الخارجية المسلطة على النظام هي عملية الإزعاج الأبيض $n(t)$.(Ozaki , 1981).

إنَّ نماذج المتسلسلات الزمنية اللاخطية قد وجدت من خلال تخصيص الدالتينg_1و g_2المذكورتين بالمعادلة (1.4) وبصيغ لا خطية ومن هذه الصيغ متعددات الحدود من الدرجة الثانية كما اقترح العالمان Ozaki و Oda (Ozaki and Oda ,1977)، او بِدالة اسية كما اقترح العالم Ozaki الأنموذج الأسي للانحدار الذاتي (Ozaki,1980) أو بدوال التوزيع الاحتمالية

المعروفة مثل الأنموذج اللوجستي ذي الانتقال الأملس للانحدار الذاتي (LSTAR Model) أو بِالدالة الأسية ذات الانتقال الأملس (ESTAR ModeL)، المقترحان من قبل العالم Terasvirta في عام (Terasvirta ,1994) 1994. وفي عام 2005 قام الباحث الحيالي بإيجاد شروط إستقرارية أنموذج ((LSTAR(P) من الرتبة P (الحيالي،2005)، وفي عام2007 اقترح كل من محمد وسالم الأنموذج اللوجستي (logistic model) وتم ايضا إيجاد شروط استقرارية الأنموذج (Mohammad and Salim, 2007)،، وفي عام 2008 اقترح الناصري أنموذج الانحدار الذاتي اللاخطي كوشي ذي الانتقال الاملس من الرتبة ((P(CSTAR(P وقام بإيجاد شروط إستقرارية الأنموذج (الناصري، 2008) وفي نفس العام دَرَسَ الدهمشيُّ شروط إستقرارية الأنموذج الأسي ذي الأنتقال الأملس للانحدار الذاتي من الرتبة ((P(ESTAR(P (الدهمشي، 2008)، وفي عام 2010 قام كل من محمد وغنام بدراسة شروط إستقرارية أنموذج كوشي للانحدار الذاتي (Mohammad and Ghannam،2010)، وفي عام 2011 اقترح كل من سالم وخلف أحد نماذج الانحدار الذاتي النسبي غير الخطي مع دراسة شروط استقراريته (سالم وخلف،2011)، وفي العام نفسهِ اقترح كل من محمود وسالم احد نماذج الانحدار الذاتي غير الخطي وبحدود دوال مثلثية (سالم ومحمود، 2011)، وفي العام نفسهِ أيضاً قام كل من سالم و اسماعيل وجاسم بدراسة أنموذج الانحدار الذاتي الأسي المعتمد على السعة (AEXPAR) وتم إيجاد شروط إستقرارية هذا الأنموذج (Salim and Esmaeel and Jasim ,2011)، وفي العام نفسهِ اقترح كل من سالم وحميد أنموذج الانحدر الذاتي غير الخطي وكذلك تم إيجاد شروط استقراريته (سالم وعواد، 2011)، وفي عام 2012 اقترح الحمداني أنموذج الانحدار الذاتي اللاخطي الأسي المختلط (MEXPAR) وقام بإيجاد شروط استقرارية الأنموذج (الحمداني، 2012) وفي عام2013 قام كل من سالم وأحمد بتحليل إستقرارية أنموذج انحدار ذاتي غير خطي من المرتبة الأولى (سالم و احمد، 2013).

٢- تعاريف أساسية:

2-1 أنموذج الانحدار الذاتي الخطي (The Autoregressive model):

يعد أنموذج الإنحدار الذاتي الخطي من أشهر نماذج المتسلسلات الزمنية الخطية وأكثرها استخداما والصيغة العامة لأنموذج الانحدار الذاتي الخطي من الرتبة p والذي يرمز له بـ AR (p) هي :

$$X_t = a_1X_{t-1} + a_2X_{t-2} + \cdots .. + a_pX_{t-p} + Z_t \ldots\ldots\ldots (2.1)$$

إذ $a_1,\ldots, a_p$: ثوابت، $\{Z_t\}$: عملية عشوائية بحتة (Purely random process)، وتسمى في بعض الأحيان بالإزعاج الأبيض وتحقق $E(Z_t) = 0$ و $Var(Z_t) = \sigma^2 z$ و $Cov(Z_t, Z_s) = 0$ لكل $t \neq s$.

نستطيع كتابة الأنموذج (2.1) بالشكل

$$\alpha(B)\,X_t = Z_t \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2.2)$$

وإنَّ B يمثل مؤثر الإزاحة الخلفية (feedback shift operator) المعرف بالشكل:

$$B^n X_t = X_{t-n} \qquad n = 0,1,2,\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

ان الحل العام للأنموذج (2.1) هو

$$X_t = f(t) + \alpha^{-1}(B)Z_t \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2.3)$$

إذ $\alpha^{-1}(B)Z_t$ يمثل الحل الخاص و $f(t)$ هي الدالة المتممة (complementary function) وهي حل المعادلة الفرقية المتجانسة $\alpha(B)X_t = 0$ وأن $f(t)$ بشكل عام لها الصيغة التالية:

$$f(t) = A_1\lambda_1^t + A_2\lambda_2^t \ldots\ldots + A_p\lambda_p^t \ldots\ldots\ldots (2.4)$$

إذ $A_1, A_2, \ldots\ldots, A_p$ ثوابت اختيارية و $\lambda_1, \lambda_2, \ldots\ldots, \lambda_p$ هي جذور المعادلة المميزة $\sum_{i=1}^{p} a_i\lambda^{p-i} = 0$

إن الدالة المتممة $f(t)$ تقترب من الصفر عندما $t \to \infty$, ويجب التأكد إذا كانت جميع جذور المعادلة المميزة ذات قيم مطلقة أقل من واحد أي ان $|\lambda_i|<1$ لـ $i = 1, \ldots\ldots, p$ في هذه الحالة يكون الأنموذج مستقراً تحاذياً (Asymptotically stationary).

وبتعبير أخر يكون أنموذج الانحدار الذاتي الخطي مستقراً تحاذياً إذا وفقط إذا كانت جميع جذور المعادلة المميزة تقع داخل دائرة الوحدة (unit circle) وهي دائرة مركزها نقطة الاصل ونصف قطرها 1.

2-2 النقطة المنفردة (singular point)(Ozaki , 1982) (Ozaki , 1985)

النقطة المنفردة ξ للأنموذج

$$x_t = f(x_{t-1}, x_{t-2}, \ldots x_{t-p}) \qquad \ldots\ldots (2.5)$$

تعرف بأنها تلك النقطة التي تحقق الشرط الآتي: إن أي مسار للأنموذج (2.5) يبدأ من نقطة قريبة بشكل كافٍ من ξ يقترب منها إما عندما $t\to\infty$ أو عندما $t\to-\infty$. إذا اقترب المسار من ξ عندما $t\to\infty$ فإنَّ النقطة المنفردة تكون مستقرة وبالعكس اذا اقترب المسار من ξ عندما $t\to-\infty$ فإنَّ النقطة المنفردة ξ تكون غير مستقرة.

2-3 دورة النهاية (limit cycle)(Ozaki , 1982) (Ozaki , 1985):

دورة النهاية للأنموذج (2.5) تعرف بأنها المسار المغلق والمعزول $x_t = x_t, x_{t+1}, x_{t+2}, \ldots\ldots, x_{t+q}$ حيث q عدد صحيح موجب. المقصود بالمسار المغلق هو أنه اذا كانت القيم الابتدائية $(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_p)$ تنتمي إلى دورة النهاية

فان$(x_{1+kq}, x_{2+kq}, \dots\dots, x_{p+kq}) = (x_1, x_2, \dots\dots, x_p)$لاي عدد صحيح. k والمقصود بالمعزول (Isolated) ان أي مسار يبدأ قريباً من دورة النهاية بشكل كاف يتقارب نحو دورة النهاية اما عندما $t\to\infty$ أو $t\to-\infty$ ، فإذا كان المسار يقترب من دورة النهاية عندما $t\to\infty$فإنَّ دورة النهاية تكون مستقرة وبالعكس إذا كان المسار يقترب من دورة النهاية عندما $t\to-\infty$ فإنَّ دورة النهاية تكون غير مستقرة. إن أصغر عدد صحيح موجب q الوارد في التعريف (3-2) يطلق عليه الدورة (period) لدورة النهاية.

3- الجانب النظري:

3-1 أنموذج ألانحدار الذاتي اللاخطي ذو الانتقال الأملس(STSechAR(P المقترح:

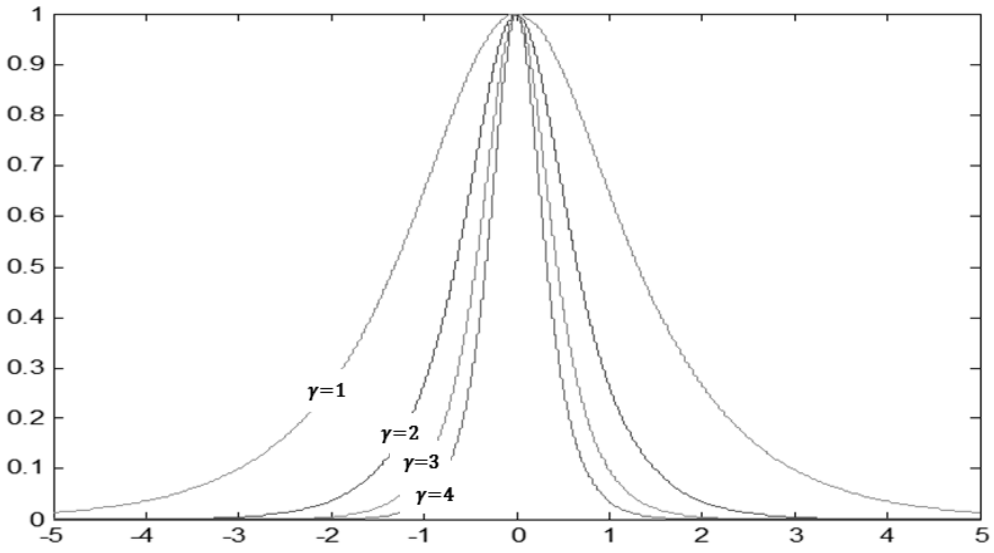
لتكن$\{x_t\}$ متسلسلة زمنية و$t = \pm1, \pm2, \pm3, \dots$ يعرف الأنموذج المقترح بالشكل الاتي:

$$x_t = \sum_{i=1}^{p} (\varphi_i + \pi_i Sech[\gamma(x_{t-1} - c)])x_{t-i} + z_t \qquad \dots.(3.1)$$

حيث π_iوφ_i و $i = 1,2,3, \dots, p$ ثوابت الأنموذجو$\gamma \in R$تسمى معلمة التمليس وc معلمة موضع الانتقال و $\{z_t\}$ عملية الإزعاج الأبيض في الزمن المتقطع وأن الدالة$Sech[\gamma(x_{t-1} - c)]$ تمتلك الخواص الاتية:

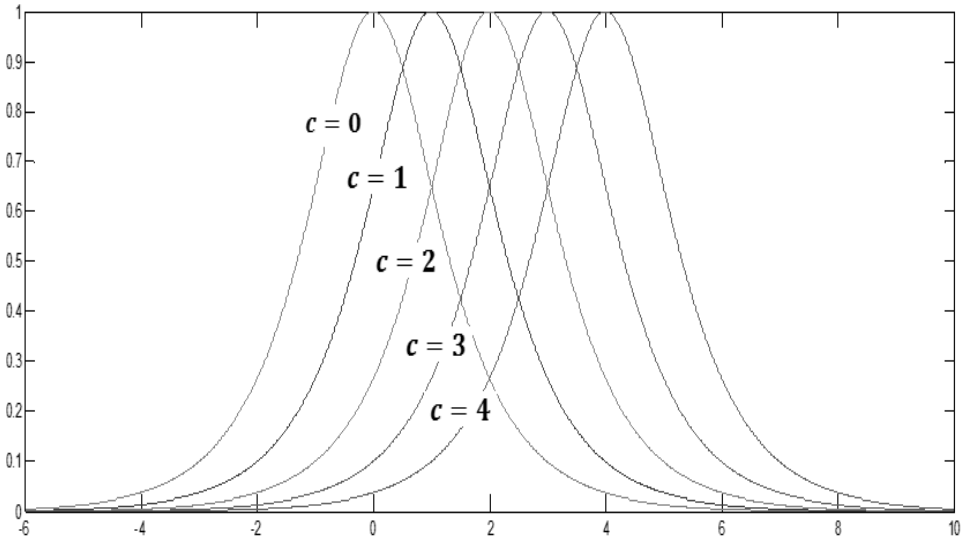
1. $\lim_{x_{t-1}\to c} Sech[\gamma(x_{t-1} - c)] = 1$
2. $\lim_{x_{t-1}\to\pm\infty} Sech[\gamma(x_{t-1} - c)] = 0$
3. $\lim_{\gamma\to\pm\infty} Sech[\gamma(x_{t-1} - c)] = 0$

وإن الخاصيتين (1) و (2) تفيدان في فكرة الانتقال الأملس ففي الخاصية (1) عندما يقترب العامل x_{t-1} الى معلمة موضع الانتقال أي بمعنى أخر $x_{t-1} \to c$ فإن معاملات الأنموذج(STSechAR(P تقترب من الثوابت $(\varphi_i + \pi_i)$ لكلi . أي إن هذا الأنموذج يملك صفة اعتمادية السعة (Amplitude-dependent) الديناميكية. في الخاصية (2) عندما يكبر او يصغر العامل $|x_{t-1}|$ بدون حد، أي عندما $|x_{t-1}| \to \pm\infty$ فإن معاملات الأنموذج STSechAR(P) تقترب من الثوابت φ_i لكل i وفي الخاصية (3)عندما تكبر قيمة معلمة التمليس $\gamma \in R$ بدون حد، أي عندما $\gamma \to \pm\infty$ فإن الأنموذج STSechAR(P) يقترب من أنموذج الانحدار الذاتي الخطي من الرتبة نفسها (AR(P)) والشكل (3.1) يمثل الرسم البياني لدالة القاطع الزائدية، ولقيم مختلفة للمعلمة γ والذي يوضح تأثير المعلمة γ على ميل منحني الدالة المذكورة.أما الشكل (3.2) فيبين تأثير المعلمة c التي تحدد موضع نقطة الانقلاب للدالة المذكورة اي تحدد موضع الأنتقال أو التحول.



شكل رقم 3-1

الرسم البياني لدالة القاطع الزائدية لقيم مختلفة للمعلمة γ



شكل رقم 3-2

الرسم البياني لدال القاطع الزائدية لقيم مختلفة للمعلمة c

ولإيجاد الشروط الخاصة للأنموذج STSechAR(P) بدلالة معلمات الأنموذج فإننا سنعتمد طريقة التقريب بالخطية المحلية المقترحة من قبل العالم ozaki ويمكن كتابة دالة القاطع الزائدية بالشكل.

$$Sech[\gamma(x_{t-1}-c)] = \frac{2}{e^{\gamma(x_{t-1}-c)}+e^{-\gamma(x_{t-1}-c)}} = \frac{2e^{-\gamma(x_{t-1}-c)}}{1+e^{-2\gamma(x_{t-1}-c)}} \quad \ldots\ldots(3.2)$$

3-2 شروط إستقرارية أنموذج الأنحدار الذاتي غير الخطي ذو الأنتقال الأملس STSechAR(P) المقترح

في البداية نوجد النقطة الشاذة الغير الصفرية (non zero singular point) وبإهمال الإزعاج الأبيض (حد الخطأ العشوائي)

(white noise)$z_t = 0$

نفرض إنه $x_t = \xi$ و $x_{t-i} = \xi$ لكل $i = 1,2,3,\dots,p$، ونعوض عن x_t و x_{t-i} لكل $i = 1,2,3,\dots p$ في المعادلة (3.1) ينتج:

$$\xi = \sum_{i=1}^{p}(\varphi_i + \pi_i Sech[\gamma(\xi - c)])\xi$$

$$\frac{1-\sum_{i=1}^{p}\varphi_i}{\sum_{i=1}^{p}\pi_i} = Sech[\gamma(\xi - c)]$$

وإن النقطة المنفردة تكون موجودة وحقيقية إذا تحقق الشرط:

$$O < \frac{1-\sum_{i=1}^{p}\varphi_i}{\sum_{i=1}^{p}\pi_i} \leq 1 \qquad \dots\dots\dots(3.3)$$

ومن خواص دالة القاطع الزائدية نحصل على

$$\gamma(\xi - c) = Sech^{-1}\left(\frac{1-\sum_{i=1}^{p}\varphi_i}{\sum_{i=1}^{p}\pi_i}\right) = Sech^{-1}(k) \qquad \dots\dots (3.4)$$

عندما $k = \frac{1-\sum_{i=1}^{p}\varphi_i}{\sum_{i=1}^{p}\pi_i}$

ومن خواص معكوس دالة القاطع الزائدية وبإجراء بعض العمليات الجبرية نحصل على $\xi = c +$

$$\frac{1}{\gamma} ln\left(\frac{1+\sqrt{1-k^2}}{k}\right) = c + \frac{1}{\gamma} Sech^{-1}(k) \qquad \dots\dots (3.5)$$

المبرهنة الاتية توضح شروط إستقرارية الأنموذج (3.1) بالاعتماد على معلمات وثوابت الأنموذج.

مبرهنة(3.1):

تكون النقطة المنفردة غير الصفرية ξ لأنموذج(STSechAR(p مستقرة إذا وفقط إذا كانت جميع جذور المعادلة $\lambda^p - \sum_{i=1}^{p} h_j \lambda^{p-i} = 0$ واقعة داخل دائرة الوحدة .حيث

$$h_1 = \varphi_1 + \pi_1 k + \left[(\gamma)\left(1 - \sum_{i=1}^{p}\varphi_i\right)\left(\frac{k^2}{1+\sqrt{1-k^2}} - 1\right)\left(c + \frac{1}{\gamma} Sech^{-1}(k)\right)\right] \qquad \dots(3.6)$$

$$h_i = \varphi_i + \pi_i k \qquad ; \; i = 2,3,4,\dots\dots p$$

وأن

$$k = \frac{1 - \sum_{i=1}^{p}\varphi_i}{\sum_{i=1}^{p}\pi_i}$$

ألبرهان:

لتكن ξ نقطة منفردة غير صفرية للأنموذج(STSechAR(p بأخذ جوار مفتوح حول النقطة ξ وبنصف قطر صغير وليكن ξ_{t-i} لـ $i = 1,2,\dots,p$ بحيث أن $\xi_{t-i}^{n} \to 0$ لكل $n \geq 2$.وبإستخدام المعادلات البينية (Variational equation):

$x_t = \xi + \xi_t \quad , \quad x_{t-i} = \xi + \xi_{t-i} \qquad ; \qquad i = 1,2, \ldots,p$

والتعويض عن x_t وx_{t-i} لـ $i = 1,2, \ldots, p$ في الأنموذج(STSechAR(P وبعد إلغاء تأثير الإزعاج الأبيض z_t أي اعتبار $z_t = 0$ لكل t ينتج

$$\xi + \xi_t = \sum_{i=1}^{p}(\varphi_i + \pi_i Sech[\gamma(\xi + \xi_{t-1} - c)])(\xi + \xi_{t-i})$$
$$\xi + \xi_t = \sum_{i=1}^{p} \varphi_i \xi + \sum_{i=1}^{p} \pi_i Sech[\gamma(\xi + \xi_{t-1} - c)]\,\xi$$
$$+ \sum_{i=1}^{p} \varphi_i\, \xi_{t-i} + \sum_{i=1}^{p} \pi_i Sech[\gamma(\xi + \xi_{t-1} - c)]\,\xi_{t-i} \quad \ldots(3.7)$$

الان نأخذ الدالة $Sech[\gamma(\xi + \xi_{t-1} - c)]$ وبالاستفادة من خواص المعادلة(3.2) ونبسطها الى ابسط صورة يمكن من خلالها اكمال الحل

$$Sech[\gamma(\,\xi + \xi_{t-1} - c)] = \frac{2e^{-\gamma(\xi+\xi_{t-1}-c)}}{1+e^{-2\gamma(\xi+\xi_{t-1}-c)}}$$
$$= \frac{2e^{-\gamma(\xi-c)}(1-\gamma\xi_{t-1})}{1+e^{-2\gamma(\xi-c)}(1-2\gamma\xi_{t-1})} \qquad \ldots(3.8)$$

تم استخدام مفكوك تايلور لكل من $e^{-\gamma(\xi_{t-1})}$ و $e^{-2\gamma(\xi_{t-1})}$ من المعادلة (٤-٣) تكون:

$$\gamma(\xi - c) = ln\left(\frac{1+\sqrt{1-k^2}}{k}\right)$$

وبإجراء بعض العمليات الجبرية البسيطة نحصل على:

$$e^{-\gamma(\xi-c)} = \frac{k}{1+\sqrt{1-k^2}} \ldots\ldots\ldots\ldots(3.9)$$
$$e^{-2\gamma(\xi-c)} = \frac{k^2}{\left(1+\sqrt{1-k^2}\right)^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(3.10)$$

نعوض كل من المعادلات (3.9) و (3.10) في المعادلة (3.8) ينتج الاتي:

$$Sech[\gamma(\xi + \xi_{t-1} - c)] = \frac{\frac{2k(1-\gamma\xi_{t-1})}{1+\sqrt{1-k^2}}}{1+\frac{k^2(1-2\gamma\xi_{t-1})}{\left(1+\sqrt{1-k^2}\right)^2}}$$

وبأجراء بعض العمليات الجبرية نحصل على:

$$Sech[\gamma(\xi + \xi_{t-1} - c)] = \frac{k(1-\gamma\xi_{t-1})\left(1+\sqrt{1-k^2}\right)}{1+\sqrt{1-k^2}-\gamma k^2\xi_{t-1}} \qquad \ldots(3.11)$$

نعوض المعادلة (3.11) في المعادلة (3.7) نحصل على:

$$\xi + \xi_t = \sum_{i=1}^{p} \varphi_i\, \xi + \sum_{i=1}^{p} \pi_i \left(\frac{k(1-\gamma\xi_{t-1})\left(1+\sqrt{1-k^2}\right)}{1+\sqrt{1-k^2}-\gamma k^2\xi_{t-1}}\right)\xi$$
$$+ \sum_{i=1}^{p} \varphi_i\, \xi_{t-i} + \sum_{i=1}^{p} \pi_i \left(\frac{k(1-\gamma\xi_{t-1})\left(1+\sqrt{1-k^2}\right)}{1+\sqrt{1-k^2}-\gamma k^2\xi_{t-1}}\right)\xi_{t-i} \ldots(3.12)$$

وبضرب طرفي المعادلة (3.12) بـ$\left(1+\sqrt{1-k^2}-\gamma k^2\xi_{t-1}\right)$ و بأضافة$\left(-\sum_{i=1}^{p}\varphi_i\,\xi\right)$ للطرفين ومن خلال عمليات جبرية بسيطة يتم الحصول على:

$$\xi\left(1-\sum_{i=1}^{p}\varphi_i\right)\left(1+\sqrt{1-k^2}\right)-\gamma k^2\left(1-\sum_{i=1}^{p}\varphi_i\right)\xi\xi_{t-1}$$
$$+\xi_t\left(1+\sqrt{1-k^2}\right)-\gamma k^2\xi_t\xi_{t-1}$$
$$=\sum_{i=1}^{p}\pi_i\,k\left(1+\sqrt{1-k^2}\right)\xi\;-\;\gamma\sum_{i=1}^{p}\pi_i k\left(1+\sqrt{1-k^2}\right)\xi\xi_{t-1}$$
$$+\sum_{i=1}^{p}\varphi_i\left(\left(1+\sqrt{1-k^2}\right)\xi_{t-i}-\gamma k^2\xi_{t-1}\xi_{t-i}\right)$$
$$+\sum_{i=1}^{p}\pi_i\left[k\left(1+\sqrt{1-k^2}\right)\xi_{t-i}-\gamma k\left(1+\sqrt{1-k^2}\right)\xi_{t-1}\xi_{t-i}\right]$$

لكن$\xi_t\xi_{t-1}\to 0$ وأيضا $\xi_t\xi_{t-i}\to 0; i=1,2,3,\dots,p$ وبقسمة الطرفين على $\left(1+\sqrt{1-k^2}\right)$ نحصل على:

$$\xi\left(1-\sum_{i=1}^{p}\varphi_i\right)-\frac{\gamma k^2\left(1-\sum_{i=1}^{p}\varphi_i\right)}{1+\sqrt{1-k^2}}\xi\xi_{t-1}+\xi_t=\sum_{i=1}^{p}\pi_i\,k\xi$$
$$-\gamma\sum_{i=1}^{p}\pi_i\,k\xi\xi_{t-1}+\sum_{i=1}^{p}\varphi_i\,\xi_{t-i}+\sum_{i=1}^{p}\pi_i\,k\xi_{t-i}$$

وبإجراء بعض العمليات الجبرية

$$\xi\left(1-\sum_{i=1}^{p}\varphi_i-\sum_{i=1}^{p}\pi_i\,k\right)+\xi_t=\frac{\gamma k^2\left(1-\sum_{i=1}^{p}\varphi_i\right)}{1+\sqrt{1-k^2}}\xi\xi_{t-1}$$
$$-\gamma\sum_{i=1}^{p}\pi_i\,k\xi\xi_{t-1}+\sum_{i=1}^{p}(\varphi_i+\pi_i k)\,\xi_{t-i}$$

وبما انه:

$$\left(1-\sum_{i=1}^{p}\varphi_i-\sum_{i=1}^{p}\pi_i\,k\right)=1-\sum_{i=1}^{p}\varphi_i-\sum_{i=1}^{p}\pi_i\frac{1-\sum_{i=1}^{p}\varphi_i}{\sum_{i=1}^{p}\pi_i}=0$$

ينتج الاتي:

$$\xi_t=\frac{\gamma k^2\left(1-\sum_{i=1}^{p}\varphi_i\right)}{1+\sqrt{1-k^2}}\xi\xi_{t-1}-\gamma\sum_{i=1}^{p}\pi_i\,k\xi\xi_{t-1}$$
$$+\sum_{i=1}^{p}(\varphi_i+\pi_i k)\,\xi_{t-i}\qquad\dots(3.13)$$

ونعوض معادلة (3.5) والتي هيξ بما يساويها في المعادلة (3.13) وينتج:

$$\xi_t=\left(c+\frac{1}{\gamma}Sech^{-1}(k)\right)\left(\frac{\gamma k^2\left(1-\sum_{i=1}^{p}\varphi_i\right)}{1+\sqrt{1-k^2}}-\gamma\sum_{i=1}^{p}\pi_i\,k\right)\xi_{t-1}$$
$$+\sum_{i=1}^{p}(\varphi_i+\pi_i k)\,\xi_{t-i}\qquad\qquad\dots\dots\dots(3.14)$$

وبما أنه

$$\sum_{i=1}^{p}\pi_i\,k=\sum_{i=1}^{p}\pi_i\frac{\left(1-\sum_{i=1}^{p}\varphi_i\right)}{\sum_{i=1}^{p}\pi_i}=1-\sum_{i=1}^{p}\varphi_i\;\dots\dots\dots\mathbf{(3.15)}$$

ونعوض (3.15) في (3.14) نحصل على:

$$\xi_t = \left[(\gamma)\left(1-\sum_{i=1}^{p}\varphi_i\right)\left(\frac{k^2}{1+\sqrt{1-k^2}}-1\right)\left(c+\frac{1}{\gamma}Sech^{-1}(k)\right)\right]\xi_{t-1} + \sum_{i=1}^{p}(\varphi_i+\pi_i k)\,\xi_{t-i}$$

وبإجراء بعض العمليات الجبرية البسيطة نحصل على:

$$\xi_t = \left[(\gamma)\left(1-\sum_{i=1}^{p}\varphi_i\right)\left(\frac{k^2}{1+\sqrt{1-k^2}}-1\right)\left(c+\frac{1}{\gamma}Sech^{-1}(k)\right)\right]\xi_{t-1} + [\varphi_1+\pi_1 k]\xi_{t-1} + \sum_{i=2}^{p}(\varphi_i+\pi_i k)\,\xi_{t-i}$$

أي إنه:

$$h_1 = \varphi_1+\pi_1 k + \left[(\gamma)\left(1-\sum_{i=1}^{p}\varphi_i\right)\left(\frac{k^2}{1+\sqrt{1-k^2}}-1\right)\left(c+\frac{1}{\gamma}Sech^{-1}(k)\right)\right]$$

$$h_i = \varphi_i + k\pi_i \quad ; \quad i = 2,3,4,\ldots..p$$

$$\xi_t = h_1\xi_{t-1} + h_2\xi_{t-2} + \cdots + h_p\xi_{t-p} \qquad \ldots\ldots.(3.16)$$

وإن المعادلة (3.16) هي أنموذج انحدار ذاتي من الرتبة p بدون الإزعاج أبيض ويكون هذا الأنموذج مستقراً إذا كانت جميع جذور المعادلة المميزة واقعة داخل دائرة الوحدة ومن هذا يؤدي الى إنه أنموذج STSechAR(P) يكون مستقرا.

في بعض الحالات قد يحتوي الأنموذج المقترح على دورة نهاية بدورة $q > 1$ والمبرهنة الآتية تحدد شروط إستقرارية هذه الدورة إن وجدت للأنموذج المقترح من الرتبة الأولى.

مبرهنة(3.2):

دورة النهاية بالدورة q (إن وجدت) للأنموذج STSechAR(1) مستقرة مدارياً (orbitally stable) إذا تحقق الشرط :

$$\left|\prod_{j=1}^{q}[\varphi_1+\pi_1 Sech[\gamma(x_{t+q-j}-c)]-\gamma\, tanh[\gamma(x_{t+q-j}-c)]\,(x_{t+q+1-j}-\varphi_1 x_{t+q-j})]\right| < 1 \qquad \ldots\ldots(3.17)$$

البرهان :

نفرض أن الأنموذج المقترح يمتلك دورة نهاية بالدورة q و q>1 بالشكل:

$$x_t, x_{t+1}, x_{t+2}, \ldots, x_{t+q} = x_t$$

وهو مسار مغلق ومعزول كل نقطة x_v و $v = t, t-1$ على مسار قريب من مسار دورة النهاية يمكن تمثيلها بـ $x_v + \xi_v$ بحيث ان $|\xi_v|$ صغيرة (أي أن $|\xi_v|^n \to 0$ لكل $n \geq 2$) لـ

$v = t, t-1$.بإلغاء تأثير الإزعاج الأبيض z_t واحلال $x_t = x_t + \xi_t$ وأيضا $x_{t-1} = x_{t-1} + \xi_{t-1}$ في الأنموذج STSechAR(1) ينتج:

$$x_t + \xi_t = (\varphi_1 + \pi_1 Sech[\gamma(x_{t-1} + \xi_{t-1} - c)])(x_{t-1} + \xi_{t-1}) \quad \ldots.(3.18)$$

ألآن

$$Sech[\gamma(x_{t-1} + \xi_{t-1} - c)] = \frac{2}{e^{\gamma(x_{t-1}+\xi_{t-1}-c)} + e^{-\gamma(x_{t-1}+\xi_{t-1}-c)}}$$

وبإستخدام مفكوك تايلور وبعض العمليات الجبرية نحصل على:

$$Sech[\gamma(x_{t-1} + \xi_{t-1} - c)] = \frac{1}{cosh[\gamma(x_{t-1} - c)] + \gamma\, \xi_{t-1} sinh[\gamma(x_{t-1} - c)]} \quad \ldots.(3.19)$$

وبتعويض معادلة (3.19) في المعادلة (3.18) ينتج:

$$x_t + \xi_t = \left(\varphi_1 + \pi_1 \frac{1}{cosh[\gamma(x_{t-1}-c)] + \gamma\, \xi_{t-1} sinh[\gamma(x_{t-1}-c)]}\right)(x_{t-1} + \xi_{t-1})$$

وبضرب جميع حدود المعادلة السابقة

بـ $(cosh[\gamma(x_{t-1} - c)] + \gamma\, \xi_{t-1} sinh[\gamma(x_{t-1} - c)])$ ينتج الاتي

$$\begin{aligned} &cosh[\gamma(x_{t-1} - c)]\, x_t + \gamma\, sinh[\gamma(x_{t-1} - c)]\, x_t \xi_{t-1} \\ &+ cosh[\gamma(x_{t-1} - c)]\, \xi_t + \gamma\, sinh[\gamma(x_{t-1} - c)]\, \xi_t \xi_{t-1} \\ &= \varphi_1\, cosh[\gamma(x_{t-1} - c)]\, x_{t-1} + \gamma\varphi_1\, sinh[\gamma(x_{t-1} - c)]\, x_{t-1} \xi_{t-1} \\ &+ \varphi_1\, cosh[\gamma(x_{t-1} - c)]\, \xi_{t-1} + \gamma\varphi_1\, sinh[\gamma(x_{t-1} - c)]\, \xi_{t-1}^2 \\ &+ \pi_1 x_{t-1} + \pi_1 \xi_{t-1} \end{aligned}$$

وبما أن $\xi_t \xi_{t-1} \to 0$ و $\xi_{t-1}^2 \to 0$ وبقسمة طرفي المعادلة على :

$cosh[\gamma(x_{t-1} - c)]$

وبإجراء بعض العمليات الجبرية ينتج:

$$x_t + \gamma \xi_{t-1} x_t\, tanh[\gamma(x_{t-1} - c)] + \xi_t = \left(\varphi_1 x_{t-1} + \frac{\pi_1 x_{t-1}}{cosh[\gamma(x_{t-1}-c)]}\right) +$$
$$\gamma\varphi_1 \xi_{t-1} x_{t-1}\, tanh[\gamma(x_{t-1} - c)] + \varphi_1 \xi_{t-1} + \frac{\pi_1 \xi_{t-1}}{cosh[\gamma(x_{t-1}-c)]}$$

وبأجراء عمليات جبرية نحصل على:

$$\begin{aligned} x_t + \xi_t &= (\varphi_1 + \pi_1\, Sech[\gamma(x_{t-1} - c)])x_{t-1} \\ &\quad +(\varphi_1 + \pi_1\, Sech[\gamma(x_{t-1} - c)])\xi_{t-1} \\ &+\left(\gamma\, tanh[\gamma(x_{t-1} - c)]\, (\varphi_1 x_{t-1} - x_t)\right)\xi_{t-1} \end{aligned}$$

وبما أن

$$x_t = (\varphi_1 + \pi_1\, Sech[\gamma(x_{t-1} - c)])x_{t-1}$$

وبإجراء عمليات جبرية بسيطة نحصل على:

$$\begin{aligned} \xi_t &= (\varphi_1 + \pi_1\, Sech[\gamma(x_{t-1} - c)])\xi_{t-1} \\ &\quad -\left(\gamma tanh[\gamma(x_{t-1} - c)]\, (x_t - \varphi_1 x_{t-1})\right)\xi_{t-1} \quad \ldots.(3.20) \end{aligned}$$

إن المعادلة (3.20) تمثل معادلة فرقية خطية ذات معاملات متغيرة من الرتبة الأولى وحلها (إيجاد قيمةξ_t) وإن عملية ايجادها صعبة جداً لكن الذي يهمنا هو تقارب حل المعادلة الفرقية نحو الصفر كلما كبرت t بدون حد أي $t \to \infty$، فإذا كان الحل متقارباً، فان دورة الغاية تكون مستقرة مدارياً. وهذا التقارب نحو الصفر يحصل فقط إذا كانت النسبة تحقق:

$$\left|\frac{\xi_{t+q}}{\xi_t}\right| < 1 \quad \text{.....(3.21)}$$

$$T(x_{t-1}) = \varphi_1 + \pi_1 Sech[\gamma(x_{t-1} - c)] - \gamma \tanh[\gamma(x_{t-1} - c)]\,(x_t - \varphi_1 x_{t-1})$$

فإن المعادلة (3.20) يعبر عنها بالشكل

$$\xi_t = T(x_{t-1})\xi_{t-1}$$

أي أن:

$$\xi_{t+1} = T(x_t)\xi_t$$

وبعد التكرار q من المرات نحصل على $\xi_{t+q} = T(x_{t+q-1})\xi_{t+q-1}$

أي:

$$\xi_{t+q} = T(x_{t+q-1}).T(x_{t+q-2}) \dots T(x_t)\xi_t$$

وعلى هذا تكون النسبة المطلوبة $\frac{\xi_{t+q}}{\xi_t} = \prod_{j=1}^{q} T(x_{t+q-j})$

ومن شرط التقارب الذي تم ذكره في العلاقة (3.21) فإن دورة النهاية بالدورة q تكون مستقرة مدارياً إذا تحقق الشرط الاتي:

$$\left|\prod_{j=1}^{q} T(x_{t+q-j})\right| < 1$$

أو بشكل اخر

$$\left|\prod_{j=1}^{q}\left[\varphi_1 + \pi_1 Sech[\gamma(x_{t+q-j} - c)] - \gamma \tanh[\gamma(x_{t+q-j} - c)]\,(x_{t+q+1-j} - \varphi_1 x_{t+q-j})\right]\right| < 1$$

وبهذا ينتهي البرهان.

القضية الاتية هي تعميم لمبرهنة دورة النهاية عندما تكون رتبة الأنموذج pو p>1 في هذه الحالة سوف يتم اعتماد تمثيل الأنموذج STSechAR(p) في فضاء الحالة(state space) وسيكون بالشكل الاتي:

$$X_t = M + (N)(Sech[\gamma(x_{t-1} - c)])\,X_{t-1} + e_t \dots (3.22)$$

علما" أن Mو N مصفوفتان تكتبان بالشكل الاتي:

$$M = \begin{bmatrix} \varphi_1 & \dots & \varphi_{P-1} & \varphi_P \\ 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}, N = \begin{bmatrix} \pi_1 & \dots & \pi_{P-1} & \pi_P \\ 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

وحيث X_t و e_t متجهات معرفة على الفضاء R^p و X_{t-1} معرف على R^{p-1} :-

$$X_t = (x_t, x_{t-1}, \dots, x_{t-p+1})^T \ , \ X_{t-1} = (x_{t-1}, x_{t-2}, \dots, x_{t-p})^T$$
$$e_t = (z_t, 0, \dots, O)^T$$

حيث أن e_t هو متجه الازعاج الأبيض.

وإن عناصر المصفوفة($(M + (N)(Sech[\gamma(x_{t-1} - c)]$ تعتمد على المتغير العشوائي x_{t-1} وسيرمز لهذه المصفوفة بالرمز $A(x_{t-1})$وهي غير ثابتة وتكتب بالصورة الآتية:

$$A(x_{t-1}) = M + (N)(Sech[\gamma(x_{t-1} - c)])$$

ويعبر عن الأنموذج في المعادلة (3.22) بالشكل الآتي:

$$X_t = A(x_{t-1})X_{t-1} + e_t$$

وايضا" يكتب بالشكل

$$X_{t+1} = A(x_t)X_t + e_{t+1} \qquad \dots(3.23)$$

<u>قضية(3.3):</u>

دورة النهاية بالدورة q(q>1) إن وجدت للأنموذج STSechAR(p) مستقرة مدارياً إذا كانت جميع القيم الذاتية للمصفوفة A ذات قيم مطلقة أقل من الواحد. بحيث ان:

$$A = A_q A_{q-1} \dots A_1 = \prod_{j=1}^{q} A_j$$

وإن:

$$A_j = \begin{bmatrix} a_{1,1}^{(j)} & a_{1,2}^{(j)} & \cdots & a_{1,p-1}^{(j)} & a_{1,p}^{(j)} \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad j = 1,2,3, \dots, q$$

إذ إنَّ:

$$a_{1,1}^{(j)} = \varphi_1 + \pi_1 Sech[\gamma(x_{t+j-1} - c)] - \gamma \tanh[\gamma(x_{t+j-1} - c)](x_{t+j} - \textstyle\sum_{i=1}^{p} \varphi_i x_{t+j-i})$$

$$a_{1,k}^{(j)} = \varphi_k + \pi_k Sech\,\gamma(x_{t+j-1} - c) \ , \ k = 2,3, \dots, p \qquad \dots(3.24)$$

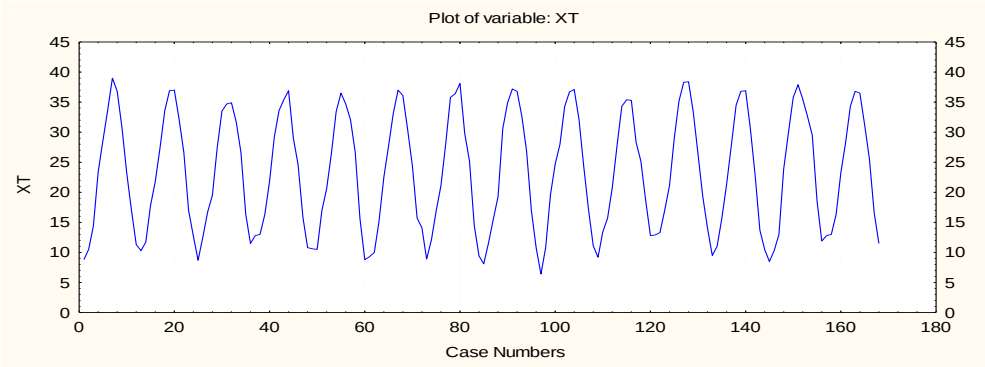
4- الجانب التطبيقي Application

في هذا الجانب سيتم تطبيق شروط إستقرارية أنموذج STSechAR(p) التي سبقت وان تم إيجادها في السابق وبالتحديد المبرهنات (3.1) و (3.2) وقضية (3.3) على بيانات تمثل معدل

درجات الحرارة لمدينة كركوك وللفترة من 2000 وحتى 2013 (الملحق). لقد تم استخدام برنامج statistica لغرض إيجاد القيم التخمينية لمعلمات النماذج وحساب تباين البواقي (Residualvariance)، كذلك استخدِم البرنامج MATLAB 2014a لحساب جذور متعددات الحدود من الدرجات العليا. وختاماً تم رسم مسارات الحل للنماذج ومشاهدة سلوك هذه المسارات لغرض مطابقة النتائج ولبيان استقرارية أو عدم استقرارية أي أنموذج بشكل واضح، وتم رسم هذه المسارات باستخدام برنامج بلغة MATLAB.

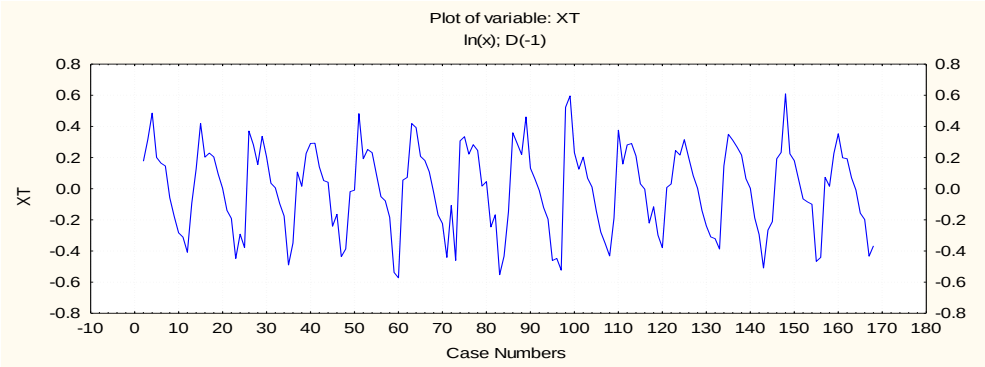
4-1 وصف البيانات Description of Data:

البيانات المدروسة تمثل المعدلات الشهرية لدرجات الحرارة في مدينة كركوك للسنوات (٢٠٠٠-٢٠١٣) وذلك لتأثر درجات الحرارة بالفصول الأربعة فإنَّ المتسلسلة الزمنية لها تذبذب بشكل ثابت تقريبا على مدار السنة والشكل (4.1) يمثل رسم المتسلسلة الزمنية للمعدلات الشهرية لدرجات الحرارة لمدينة كركوك وللسنوات (2000-2013)، ولكي نسهل الحسابات العددية التي سنقوم بها استخدمنا تحويل الفرق الأول للوغاريتم الطبيعي للبيانات والشكل (4.2) يمثل رسم المتسلسلة الزمنية بعد التحويل.



شكل رقم 4.1

رسم المتسلسلة الزمنية للمعدلات الشهرية لدرجات الحرارة لمدينة كركوك للسنوات (2000-2013)



شكل رقم 4.2

رسم المتسلسلة الزمنية بعد إستخدام التحويل

4-2 نمذجة البيانات:

في هذه الفقرة سوف نقوم بإستخدام برنامج statistica لتخمين قيم معلمات النماذج لاسيما جزء التقدير اللاخطي. نأخذ الأنموذج عندما p=4

$$x_t = \sum_{i=1}^{4}(\varphi_i + \pi_i Sech[\gamma(x_{t-1} - c)])x_{t-i} + z_t$$

$\hat{\varphi}_1 = 0.277688$ $\hat{\pi}_1 = 1.367470$

$\hat{\varphi}_2 = -0.460890$ $\hat{\pi}_2 = 0.957921$

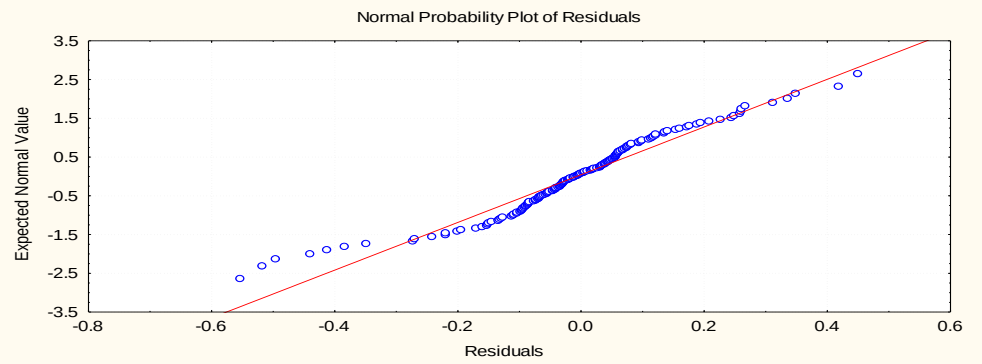
$\hat{\varphi}_3 = 0.059270$ $\hat{\pi}_3 = -0.579888$

$\hat{\varphi}_4 = -0.458102$ $\hat{\pi}_4 = 0.283470$

$\hat{\gamma} = 5.034471$ $\hat{c} = -0.002834$

وإن تباين البواقي هو $\hat{\sigma}_z^2 = 0.024457$

والشكل (4.3) يمثل رسم الاحتمالية الطبيعية (Normal Probability) لبواقي الأنموذج، وإن النقاط المؤشرة على الرسم تمثل قيم متسلسلة بواقي الأنموذج، والمقصود بالبواقي هي الفروقات بين القيم الحقيقية للمتسلسلة والقيم المتنبأ بها من قبل الأنموذج.



شكل رقم 4.3

رسم الاحتمالية الطبيعية لبواقي الأنموذج STSechAR(4)

ومن معادلة (3.5) فإنَّ النقطة المنفردة غير الصفرية موجودة وحقيقية وقيمتها هي $\xi = 0.1432$ ومن مبرهنة (3.1) فأن قيمة h_i و $i = 1,2,3,4$ هي:

$h_1 = 0.6300$,$h_2 = 0.2860$, $h_3 = -0.3929$, $h_4 = -0.2371$

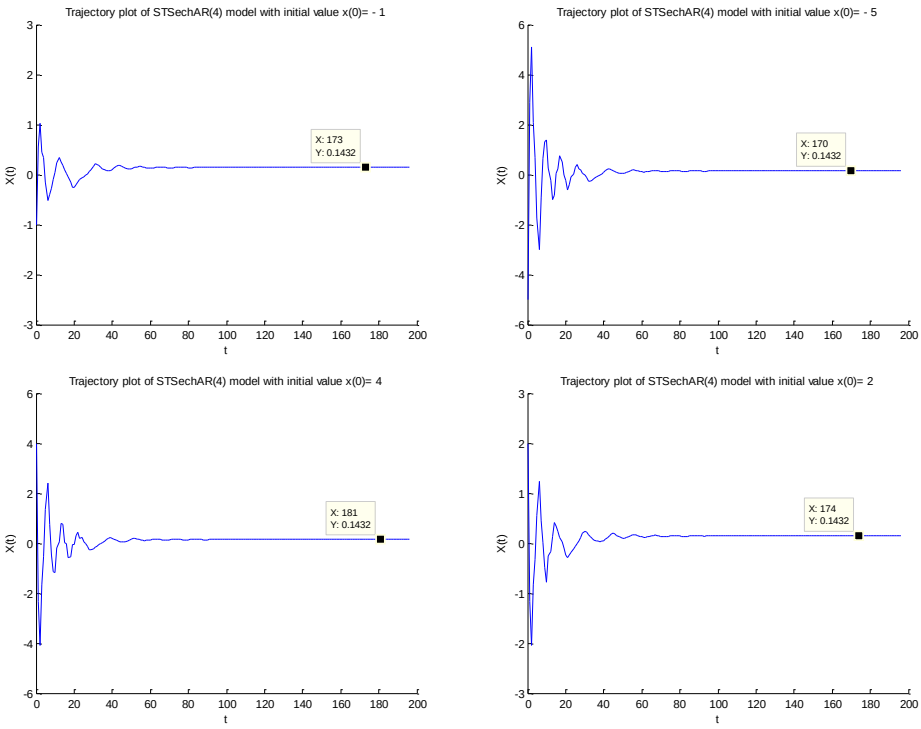
وأن جذور المعادلة المميزة $\lambda^4 - \sum_{i=1}^{4} h_i \lambda^{4-i} = 0$ لهذا الأنموذج هي:

$\lambda_1 = 0.7768 + 0.5251i$ $\lambda_2 = 0.7768 - 0.5251i$

$\lambda_3 = -0.4618 + 0.2376i$ $\lambda_4 = -0.4618 - 0.2376i$

وبالتالي نحصل على أنه الأنموذج من الرتبة الرابعة يكون مستقراً وذلك لأن جميع جذور المعادلة المميزة واقعة داخل دائرة الوحدة $|\lambda_1|, |\lambda_2|, |\lambda_3|, |\lambda_4| < 1$.

والشكل (4.4) يبين رسم مسار الأنموذج STSechAR(4) لقيم ابتدائية مختلفة



شكل رقم 4.4

رسم مسار الأنموذج STSechAR(4) لقيم ابتدائية مختلفة

الآن نأخذ p=8 نحصل على الأنموذج من الرتبة الثامنة

$$x_t = \sum_{i=1}^{8}(\varphi_i + \pi_i Sech[\gamma(x_{t-1} - c)])x_{t-i} + z_t$$

$\hat{\varphi}_1$=−0.116694$\hat{\pi}_1$=−547.106

$\hat{\varphi}_2$=−0.043619$\hat{\pi}_2$=−1420.80

$\hat{\varphi}_3$=−0.303755$\hat{\pi}_3$=4103.988

$\hat{\varphi}_4$=−0.305960$\hat{\pi}_4$=909.6738

$\hat{\varphi}_5$=−0.168675$\hat{\pi}_5$=−2279.53

$\hat{\varphi}_6$=−0.397080$\hat{\pi}_6$=4537.803

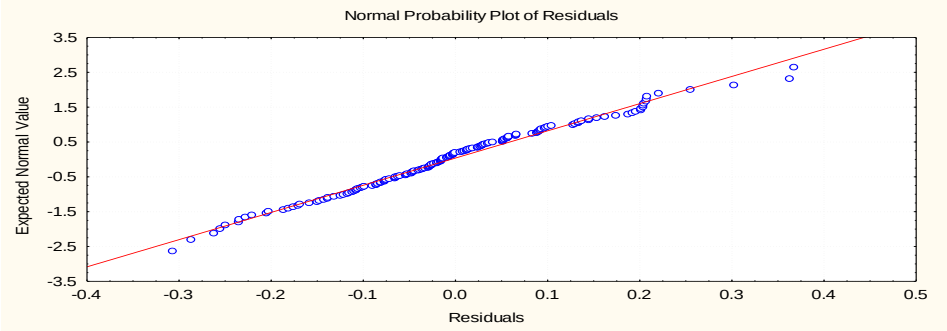
$\hat{\varphi}_7$=−0.245023$\hat{\pi}_7$=−1936.18

$\hat{\varphi}_8$=−0.496727$\hat{\pi}_8$=49.45408

$\hat{\gamma}$ = 7.176416$\hat{c}$=1.592000

وإن تباين البواقي هو $\hat{\sigma}_z^2 = 0.015901$

والشكل (4.5) يبين رسم الاحتمالية الطبيعية لبواقي الأنموذج STSechAR(8)



شكل رقم 4.5

رسم الاحتمالية الطبيعية لبواقي الأنموذج STSechAR(8)

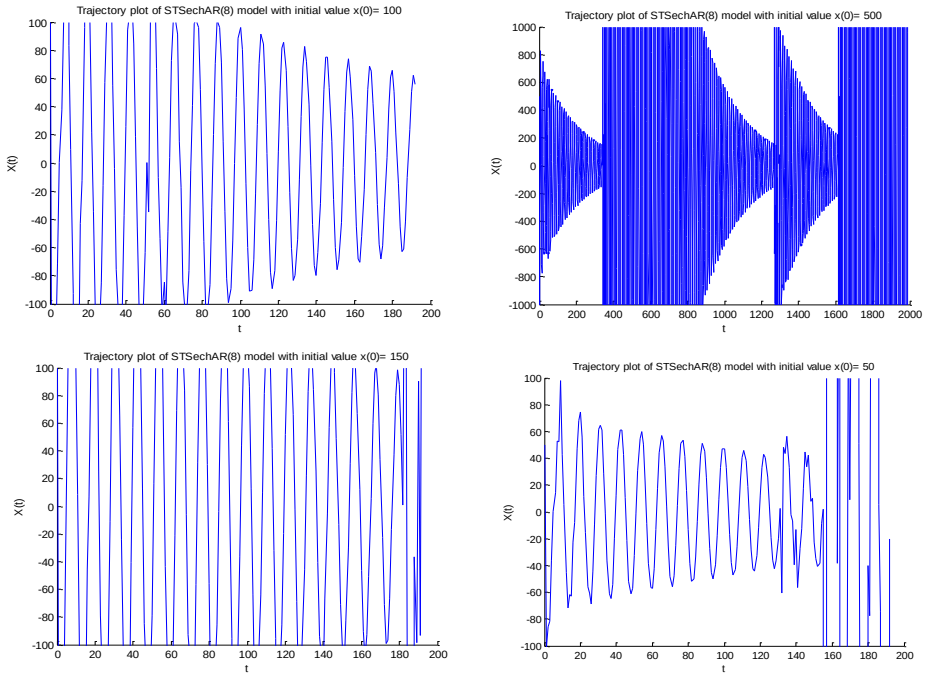
ويتم ايجاد النقطة المنفردة غير الصفرية من معادلة (3.5) وهي موجودة وحقيقية وقيمتها هي: $\xi = 2.6657$ وأن قيمو $h_i i = 1, \dots, 8$ تم ايجادها من مبرهنة (3.1) وهي:

$h_1 = -59.4841 \quad h_2 = -1.3232 \quad h_3 = 3.3922$
$h_4 = 0.5133 \quad h_5 = -2.2216 \quad h_6 = 3.6895$
$h_7 = -1.9887 \quad h_8 = -0.4522$

وأن جذور المعادلة المميزة $\lambda^8 - \sum_{i=1}^{8} h_i \lambda^{8-i} = 0$ لهذا الأنموذج هي:

$\lambda_1 = -59.4609 \quad , \lambda_2 = 0.5021 + 0.2215i$
$\lambda_3 = 0.5021 - 0.2215i \quad , \quad \lambda_4 = 0.1152 + 0.5713\text{i}$
$\lambda_5 = 0.1152 - 0.5713\text{i} \quad , \quad \lambda_6 = -0.5445 + 0.3788\text{i}$
$\lambda_7 = -0.5445 - 0.3788\text{i} \quad , \quad \lambda_8 = -0.1690$

وإن هذا الأنموذج غير مستقر وذلك لأن الجذر λ_1 غير واقع داخل دائرة الوحدة أي $|\lambda_1| = 59.4609 > 1$ والشكل(4.6) يبين رسم مسارا لأنموذج STSechAR(8) لقيم ابتدائية مختلفة.



شكل رقم 4.6

رسم مسار الأنموذج STSechAR(8) لقيم ابتدائية مختلفة

ولبيان أي أنموذج أفضل من بين النماذج العشرة الأولى أخذنا معيارية اكايكي الذي يكتب اختصاراً AIC وهي من المعايير المهمة المعتمدة لاختيار أفضل رتبة لأنموذج المتسلسلات الزمنية ويعرف هذا المعيار بالنسبة للمتسلسلات الزمنية الخطية بالشكل الاتي:

$$AIC(p) = -2\ln(\text{likelihood function}) + 2M \quad \dots(4.1)$$

اذ p تمثل رتبة الأنموذج و Mعدد معلمات الأنموذج المخمنة (Akaike , 1974)، وفي عام 1977 اوجد العالمان Ozaki وOda صيغة لحساب معيار اكايكي خاصة بالنماذج اللاخطية للمتسلسلات الزمنية وهي الصيغة التي سوف نعتمدها كون الأنموذج لاخطي وتعرف بالشكل الاتي:

$$AIC(p) = (N - p)\ln(\hat{\sigma}_z^2) + 2M \quad \dots(4.2)$$

إذ p تمثل رتبة الأنموذج وN تمثل عدد المشاهدات للعينة و $\hat{\sigma}_z^2$ تمثل القيمة التخمينية لتباين البواقي وM تمثل عدد معلمات الأنموذج المخمنة (Ozaki and Oda,1977)، والأنموذج الافضل من بين النماذج العشرة الاولى هو STSechAR(4) كون قيمة AIC له أقل ما يمكن والجدول الآتي يبين قيم معيارية اكايكي لـ p=1,2,...10.

	أنموذج الانحدار الذاتي الغير خطي لدالة القاطع الزائدية للأنتقال الأملسSTSechAR(p)			
الرتبة P	النقطة المنفردة غير الصفريةɣ	تباين البواقي σ_z^2	معيار أكايكي AIC(p)	إستقرارية الأنموذج
1	0.1061	0.039292	-526.0612	النقطة المنفردة مستقرة
2	0.1514	0.036395	-528.0718	النقطة المنفردة مستقرة
3	0.1550	0.027436	-562.9398	النقطة المنفردة مستقرة
4	0.1432	0.024457	-570.0234	النقطة المنفردة مستقرة
5	0.1050	0.022989	-568.3201	النقطة المنفردة غير مستقرة
6	غير موجودة	0.022494	-560.1485	الأنموذج غير مستقر
7	غير موجودة	0.019361	-571.5077	الأنموذج غير مستقر
8	2.6657	0.015901	-589.3474	النقطة المنفردة غير مستقرة
9	0.9108	0.013102	-605.9136	النقطة المنفردة غير مستقرة
10	غير موجودة	0.011928	-607.0434	الأنموذج غير مستقر

المـصـادر

اولا: العربية

١. الحمداني، رعد عواد حميد مخلف، (2012)،"دراسة شروط استقرارية نموذج الانحدار الذاتي الاسي المختلط باستخدام طريقة التقريب الخطي " مجلة تكريت للعلوم الصرفة، المجلد (17) العدد (3).

٢. الحيالي، أزهر عباس، (2005)، " استقرارية بعض نماذج الانحدار الذاتي اللاخطية"، أطروحة دكتوراه غير منشورة مقدمة إلى كلية التربية، جامعة تكريت.

٣. الدهمشي، هبة هاني عبدالله حسين، (2008)،" دراسة شروط استقرارية النموذج الأسي ذي الانتقال الأملس للانحدار الذاتي مع التطبيق "، رسالة ماجستير غير منشورة مقدمة إلى كلية التربية، جامعة تكريت.

٤. سالم، عبدالغفور جاسم وحميد، رعد عواد، (2011)،"دراسة استقرارية احد نماذج الانحدار الذاتي غير الخطي مع تطبيق"، مجلة الرافدين لعلوم الحاسبات والرياضيات المجلد (8) العدد (1).

٥. سالم، عبد الغفور جاسم و خلف، حامد محمد،(2011)،" دراسة استقرارية أحد نماذج الانحدار الذاتي النسبي غير الخطي " مجلة الرافدين لعلوم الحاسوب والرياضيات المجلد (8) العدد (1).

٦. سالم، عبد الغفور جاسم و محمود، اسراء سالم، (2011)، "دراسة استقرارية احد نماذج الانحدار الذاتي غير الخطي وبحدود دوال مثلثية مع تطبيق"، المجلة العراقية للعلوم الاحصائية (20)، عدد خاص بوقائع المؤتمر العلمي الرابع كلية علوم الحاسوب والرياضيات ص **[**430-408].

٧. سالم، عبد الغفور جاسم و احمد، عبير عبد الخالق، (2013)، "تحليل إستقرارية أنموذج أنحدار ذاتي غير خطي من المرتبة الأولى"، مجلة الرافدين لعلوم الحاسوب والرياضيات المجلد (١٠) العدد (٤).

٨. الناصري، عمر صابر، (2008)،" دراسة شروط استقرارية نموذج كوشي ذي الانتقال الأملس للانحدار الذاتي مع تطبيق"، رسالة ماجستير غير منشورة مقدمة إلى كلية التربية، جامعة تكريت.

٩. مديرية الأنواء الجوية العراقية /مدينة كركوك/ المناخ.

ثانيا: الأجنبية

10. Akaike , H. , (1974), "A New Look of Statistical Model Identification ", IEEE Transaction on Automatic Control , A C-19, pp(716-722).
11. Haggan , V. and Ozaki , T. ,(1980) ,"Amplitude Dependent Exponential AR Model Fitting for Nonlinear Random Vibrations" , O. D. Anderson , Ed. time series, North Holland Publishing Company, pp(57-71).
12. Mohammad .A.A and Ghannam . A.K. ,(2010) ,"stability conditions of Cauchy Autoregressive Model ", Zanco Journal of pure and applied science Volume (22) (special issue), Salah adding in university, Erbil, IRAQ.
13. Mohammad A.A., and, Salim A.J.,(2007), "Stability Of Logistic Autoregressive Model ", Qatar university, Sci. ,27,PP(17-28).
14. Ozaki, T., (1981),"Nonlinear Threshold Autoregressive Models for Nonlinear Random Vibrations", J. App. Prob. 18, pp(443-451).
15. Ozaki , T. , (1982) ,"The Statistical Analysis of Perturbed Limit Cycle Processes Using Nonlinear Time series Models", Journal of Time Series Analysis, V. 3, No. 1, pp(29-41).

16. Ozaki, T., (1985) ,"Nonlinear Time Series Models and Dynamical Systems", Handbook of Statistics, V. 5 (Ed. Hannan, E. J. and Krishnailah , P. R. and Rao , M. M.) , Elsevier Science Publishers B. V. , pp(25-83).
17. Ozaki, T. and Oda , H. , (1977) ,"Nonlinear Time Series Models Identification by Akaike's Information Criterion" , In Information and Systems , ed. Dubuisson . Pergamum Press , Oxford . pp(83-91).
18. Ozaki , T.,(1980),"Nonlinear Time Series Model for Nonlinear Random Vibrations" , J. App. Prob. 17 , pp (84-93).
19. Priestley , M. B. , (1981) ,"Spectral Analysis and Time Series" , Volume 1 , "univariate series" , Academic Press . Inc , London.
20. Salim A.J and Esmaeel. k and Jasim. H. T. ,(2011), "A study of the stability of an amplitude-dependent exponential autoregressive model with application", Iraqi Journal of Statistical Science, The Fourth Scientific Conference of the College of Computer Science & Mathematics pp [52-62].
21. Terasvirta , T. , (1994) ,"Specification , Estimation and Evaluation of Smooth Transition Autoregressive Models" , Journal of The American Statistical Association , V. 89 , pp(208-218).
22. Tong, H., (1990), "Nonlinear Time Series" A Dynamical System Approach", Oxford University Press, New York.

الملحق

جدول بيانات المعدل الشهري لدرجات الحرارة لمدينة كركوك للأعوام 2000–2013

السنة	كانون الثاني	شباط	آذار	نيسان	أيار	حزيران	تموز	آب	أيلول	تشرين الأول	تشرين الثاني	كانون الأول
2000	8.8	10.5	14.4	23.4	28.6	33.7	39.0	36.8	30.8	23.2	17.0	11.3
2001	10.3	11.7	17.8	21.8	27.4	33.6	36.9	37.0	32.2	26.6	17.0	12.7
2002	8.7	12.6	16.7	19.5	27.3	33.5	34.7	34.9	31.7	26.6	16.3	11.5
2003	9.5	11.6	16.2	21.8	29.2	33.6	35.4	36.9	29.0	24.6	15.9	10.8
2004	10.6	10.5	17.0	20.6	26.5	33.4	36.5	34.7	32.1	26.7	15.6	8.8
2005	9.3	10.0	15.2	22.5	27.7	33.2	37.0	36.1	30.5	24.4	15.7	14.1
2006	8.9	12.1	16.9	21.1	28.0	35.8	36.4	38.1	29.8	25.2	14.5	9.4
2007	8.1	11.6	15.5	19.3	30.6	34.9	37.2	36.8	32.6	26.8	16.9	10.8
2008	6.4	10.8	19.6	24.7	28.0	34.3	36.7	37.1	32.1	24.3	17.1	11.1
2009	9.2	13.4	15.7	20.8	27.8	34.3	35.4	35.3	28.3	25.2	18.7	12.8
2010	12.9	13.3	17.0	21.1	28.9	35.2	38.3	38.4	33.4	26.3	19.3	14.0
2011	9.5	11.0	15.6	21.3	27.8	34.5	36.8	36.9	30.6	22.8	13.7	10.5
2012	8.5	10.3	13.0	23.9	29.9	35.8	37.9	35.5	32.6	29.5	18.5	11.9
2013	12.8	13	16.3	23.2	28.3	34.3	36.8	36.5	31.2	25.6	16.6	11.5

*:تم إجراء معالجة هذه البيانات لعدد من الأشهر المفقودة وذلك بأخذ معدل درجات الحرارة لنفس الأشهر من السنوات السابقة واللاحقة والأشهر المعالجة هي (كانون الأول من٢٠٠٢) و(كانون الثاني و شباط وآذار ونيسان من ٢٠٠٣) و(من أيار وحتى كانون الأول من ٢٠١٣).