تقدير بيز لمعلمتي توزيع ويبل وتحديد حجم العينة الأمثل تحت دالة خسارة أسية (مع التطبيقNLINIEXالاخطية)

أ.م.د.ريا سالم محمد الرسام   م.صفوان ناظم راشد العكاش

كلية علوم الحاسوب والرياضيات/ جامعة الموصل

Bayesian Estimation of Weibull distribution parameters and determine optimal sample size under Non-Linear exponential Loss function (NLINEX) with Application

Assis. Prof. Dr. Raya S. AL-R. Lec. Safwan N. R.Al-A.

College of computers Sciences & Mathematics/Uni. Mosul

تاريخ استلام البحث 2016/3/28   تاريخ قبول النشر 2016/6/19

المستخلص:

اهتم هذا البحث بتقدير بيز لمعلمتي توزيع ويبل وتحت دالة خسارة آسية لاخطية (NLINIEX) في حالة توفر معلومات مسبقة غير المتماثلة المقترحة من قبل (Saiful Islam,Roy and Ali,2004) عندما تكون معلمة الشكل (Shape Parameter) للتوزيع السابق المرافق لـ θ (Conjugate Prior) معلومة وكذلك عندما تكون كلتا معلمتي التوزيع غير معلومة مع تحديد حجم العينة الأمثل للحالتين، إذ تم توليد بيانات عشوائية باستخدام ال محاكاة لغرض تقدير معلمات توزيع ويبل في الحالة الأولى تحت نفس التوزيع وبأحجام مختلفة (n=10,50,100 وبتكرار قدره (N=1000) مع أخذ قيم أولية للمعلمتين α_0,β_0 وقيمة أولية لـ b فضلا" عنأخذ بيانات حقيقية تتبع هذا التوزيع لتوصلنا الى مقدر متوازن يجمع بين دالتين خسارة مع تحديد حجم عينة الأمثل.

الكلمات الاستدلالية: مقدر بيز، دالة الخسارة الاسية اللاخطية (NLINIEX.)، حجم العينة الأمثل

Abstract:

This paper interested to Bayesian estimation of Weibull distribution parameters under Non-Linear exponential Loss function which proposed by Saiful Islam,Roy and Ali,2004 in the state of informative (Conjugate Prior) when the shape parameter is known and two parameters are unknown with determine optimal sample size from two cases, where the generation of the random data using the simulation for estimate Weibull distribution parameters in first case under the same distribution from different sample sizes (n=10,50,100) and (N=1000), taking initial values for the parameters α_0,β_0 and initial value b, in addition to taking real data that follow this distribution, to get to estimator balancedadd between two loss function with determine optimal sample size.

Key word:Bayesian Estimation, Weibull distribution, Non-Linear Exponential loss function (NLINEX),optimal sample size.

أولاً: المقدمة

تعد عملية التقدير النقطي في الاستدلال الإحصائي من أهم العمليات للوصول إلى المقدر المناسب واحد هذه المقدرات هو مقدر بيز الذي يعدَ من أبرز طرق التقدير وذلك من خلال (Lindley,1972) إعطاء أهمية للمعلمة المجهولة باعتبارها متغيراً عشوائياً لهُ توزيع احتمالي.

وتبرز أهمية أسلوب بيز باستخدامه لدوال الخسارة عند إيجاد المقدر إذ يكون التقدير بأقل خسارة ممكنة ومن بين هذه الدوال دالة الخسارة الآسية اللاخطية (NLINEX) المقترحة من قبل (Saiful Islam,Roy and Ali,2004) وهي من دوال الخسارة غير المتماثلة والتي تكونعلى شكل تركيبة خطية بين دالتين للخسارة أولها : دالة الخسارة الآسية الخطية غير المتماثلة (LINEX Loss function) المقترحة

(SE) والثانية دالة الخسارة التربيعية المتماثلة (Zellner,1986) والمعدلة من قبل (Varian,1975من قبل ( ) وتكون (NLINEX) أما الدالة المستخدمة في البحث فهي (Saful Islam,2011) (Loss function) غير المتماثلة كون شكل هذه الدالة ليست دائماً ذات صلة LINEXتعديل لدالة الخسارة الآسية الخطية ( ) ولا سيما في واقع البيانات الحقيقية مع بيانات الحياة لتكون دالة Pross,2003خطية مع الشكل الآسي (الخسارة ذات صلة لاخطية مع الشكل الآسي لذلك أطلق عليها اسم دالة الخسارة آسية لاخطية) ذو معلمتين (Weibull Distribution)، وتم استخدام هذه الدالة لتقدير معلمات توزيع ويبل (NLINEX(ويعدُّ هذا توزيع من التوزيعات المستمرة الأكثر شيوعاً في تحليل بيانات الفشل إذ تم اشتقاق توزيع ويبل من) للقيم المتطرفة (مروان طارق، 2011) (Type-III) عام 1928 كتوزيع ثالث (Tippct and fisherقبل ( ) بعض التطبيقات الخاصة بالتوزيع في حالات فشل الأجهزة Wallodi Weibullوقد بين العالم السويدي (الكهربائية فضلاً عن تحليل قوة الكسر للأدوات.

ليكون هدف البحث تقدير معلمتي توزيع ويبل لحالات مختلفة تحت دالة خسارة آسية لاخطية)مع مقارنة المقدرات الناتجة من هذه الدالة مع المقدرات التي تم الحصول عليها تحت دالة NLINEX( ) فضلاً عن MSE) ومعيار المقارنة المستخدم يمثل متوسط مربعات الخطأ (SE) و(LINEXالخسارة ( ) Monte Carloتحديد حجم العينة الأمثل بالاعتماد على دالة الكلفة الكلية، وباستخدام اسلوب المحاكاة (بالإضافة الى بيانات حقيقية تمثل الفحص المختبري لإنتاج شركة أربيل لصناعة الحديد الصلب (مروان طارق، 2011).

ثانياً: الجانب النظري

دوال الخسارة Loss function:

تمثُّل دوال الخسارة دوراً مهماً في عملية التقدير وبشكل خاص باستدلال بيز في التحليلات الإحصائية في نظرية القرار ويميل الكثير من الباحثين في استخدامها بشكلها المتماثل أو غير المتماثل ؛ لغرض الوصول إلى مقدر بأقل خسارة ممكنة والتي تكون دالة غير سالبة وتحقق الشروط:

1- $L(\hat{\theta},\theta) \geq 0$ لجميع القيم الممكنة من $\hat{\theta},\theta$.

2- $L(\hat{\theta},\theta) = 0$ لكل $\hat{\theta} = \theta$.

دالة خسارة الخطأ التربيعي Squared Error Loss function (SE):

تعدُّ من أسهل دوال الخسارة المتماثلة التي توصلنا إلى مقدرات بيز ويميل الكثير من الباحثين إلى) وتحت التقدير Overestimationاستخدامها لأنها تعطي أهمية متساوية بين فرق التقدير (

) مما عارضه كثير من الباحثين من جانب أخر وان تقدير (Underestimation)(DeGroot,1970
تحت هذه الدالة تأخذ الصيغة الرياضية التالية: θ المعلمة

$$L(\hat{\theta},\theta)=k(\hat{\theta}-\theta)^2 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

حيث أن: k تمثل كمية ثابتة تكون مساوية للواحد الصحيح في أغلب الأحيان.

والذي يجعل دالة المخاطرة أقلما يمكن (SE تحت دالة الخسارة $\hat{\theta}_{SE}$) وتكون صيغة مقدر بيز للمعلمة θ يكون بالصيغة التالية:

أي أن

$$\hat{\theta}_{SE}=E(\theta\,|\,\underline{X})=\int\theta\,p(\theta\,|\,\underline{X})\,d\theta \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

يمثل توقع التوزيع اللاحق. مقدر بيز للمعلمة θ

دالة الخسارة الآسية الخطية Linear Exponential Loss function (LINEX)

وهي دالة غير متماثلة تم استخدامها من قبل عدد كبير من الباحثين واقترحها العالم
) وتأخذ الصيغة الآتية: (Varian,1975

$$L(\hat{\theta},\theta)=ke^{b(\hat{\theta}-\theta)}-c(\hat{\theta}-\theta)-k$$

إذإنَ: $k>0$ وان $b,c\neq 0$

فيجب $L(\hat{\theta},\theta)=0$) بإعادة صياغة هذه الدالة ولكي تكون دالة خسارة أقل ما يمكن Zellner,1986 قام (
بعد اشتقاق $kb=c$ سوف نصل إلى $L'(\hat{\theta},\theta)\big|_{\hat{\theta}=\theta}=0$ وان الحد الادنى الذي يجعل $\hat{\theta}=\theta$ أن تكون المعادلة لتصبح الصيغة الرياضية أبسط بالشكل التالي:

$$L(\hat{\theta},\theta)=k[e^{b(\hat{\theta}-\theta)}-b(\hat{\theta}-\theta)-1] \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

وهي كمية ثابتة تمثل معلمة الشكل لدالة الخسارة ومن أهم خواص هذه الدالة أنها غير متماثلة إذ $b\neq 0$ حول نقطة الأصل، ويقترب شكلها من الدالة الآسية من جانب نقطة الأصل وتقترب من الشكل الخطي من الجانب الآخر (Press,2003) وان معلمة الشكل (b قيمتها) تتحكم في درجة عدم التماثل للدالة من ناحية (b>0) تكون فيها فوق التقدير تتحكم باتجاه عدم التماثل بمعنى انه لقيم b العددية، أما إشارة معلمة الشكل (|b|) والعكس صحيح وان لقيم (Underestimation) أكثر خطورة من تحت التقدير (Overestimation) في حالة اقترابها من الصفر (أي تكون صغيرة جداً) سوف تؤول إلى دالة الخسارة لـ SE (الراوي واثق،2013).

تحت هذه الدالة التي تجعل دالة المخاطرة أقل ما يمكن بالشكل التالي: θ للمعلمة $\hat{\theta}$ ليكن مقدر بيز

$$\hat{\theta}_{LINEX}=-\frac{1}{b}\,Ln[E(e^{-b\theta}\,|\,\underline{X})] \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4)$$

دالة الخسارة الآسية اللاخطية Non-Linear Exponential Loss function (NLINEX)

اقترح (Saiful Islam,Roy and Ali,2004) هذه الدالة وهي من الدوال غير المتماثلة وتأخذ الصيغة الرياضية التالية:

$$L(\hat{\theta},\theta)=ke^{b(\hat{\theta}-\theta)}+\gamma(\hat{\theta}-\theta)^2-\gamma(\hat{\theta}-\theta)-k$$

إذ إنَ:

$\gamma>0\,,\,b>0$ وبتعويض $\gamma=kb$ التي تحقق فيها الدالة $L(\hat{\theta},\theta)=0$ عندما $\hat{\theta}-\theta=0$ وفق إثبات الاقتراح ليكون شكل الدالة بصيغته النهائية على النحو الآتي:

$$L(\hat{\theta},\theta)=k[e^{b(\hat{\theta}-\theta)}+b(\hat{\theta}-\theta)^2-b(\hat{\theta}-\theta)-1]$$

والتي

$$=k[(e^{b(\hat{\theta}-\theta)}-b(\hat{\theta}-\theta)-1)+b(\hat{\theta}-\theta)^2] \qquad \text{..........................(5)}$$

يمكن كتابتها بالشكل التالي:

$$L(\hat{\theta},\theta)=k[\text{LINEX Lossfunction}+b\,\text{SE Lossfunction}]$$

وعليه ف إنَ الدالة في المعادلة (5) سوف تمثل تركيبة خطية بين دالتين للخسارة (LINEX Loss function and SE Loss function) ليكون لهذه الدالة دور في تحسين أو تعديل لدالة الخسارة LINEX (Pross,2003) إلى شكل ليس له في شكلها الذي يمتلك صفة خطية مع الشكل الآسي صفة خطية مع الشكل الآسي للدالة لكي تلائم البيانات الواقعية التي تأخذ الشكل الغير المتماثل وخاصة في بيانات الحياة.

والذي يتم NLINEX تحت دالة الخسارة الاسية اللاخطية θ نسبةً الى المعلمة $\hat{\theta}$ ويكون مقدر بيز لـ

والتي تجعل $0=\dfrac{\partial E_\theta(L(\hat{\theta},\theta))}{\partial\hat{\theta}}=\dfrac{\partial PR}{\partial\hat{\theta}}$ الحصول عليه من خلال اخذ المشتقة لدالة المخاطرة اللاحقة دالة المخاطرة اقل ما يمكن لنحصل على المقدر بالصيغة التالية:

$$\left.\begin{aligned}&\hat{\theta}_{NLINEX}=\frac{1}{b+2}[-\text{Ln}\,E(e^{-b\theta}\,|\,\underline{X})+2\,E(\theta\,|\,\underline{X})]\\&\text{or}\\&\hat{\theta}_{NLINEX}=\frac{1}{b+2}[b\,\hat{\theta}_{LINEX}+2\,\hat{\theta}_{SE}]\end{aligned}\right\} \qquad \text{..........................(6)}$$

إذإنَ:

$b\neq-2$

وقد امتلك مقدر بيز تحت دالة الخسارة لـ NLINEX خصائص مهمة في دراسة التوقع اللاحق ودوره في إعطاء وزن b فضلاً عن دور معلمة الشكل (SE و LINEX) في عملية التقدير مع مقدر دالة الخسارة لـ

LINEX ودوره الأساسي في تعديل دالة الخسارة لـ $\hat{\theta}_{LINEX}$ أو $\hat{\theta}_{SE}$ للمقدر في الاقتراب من مقدر في أخذ الشكل اللاخطي ليكون ملائم للبيانات.

دالة الكلفة Cost function:

لهذه الدالة أهمية كبيرة في عدة مسائل ومنها قيد الدراسة وهي الوصول إلى اقل كلفة ممكنة فضلاً عن هدفنا الأساسي في هذا البحث وهو الوصول إلى حجم العينة الأمثل باستخدام هذه الدالة والمتمثلة بالكلفة الكلية التي يرمز لها بالرمز $TC_{(n)}$ التي تجمع بين الكلفة الخطية $C_{(n)}$ وبين دالة المخاطرة اللاحقة (Posterior Risk (PR) والتي تم الحصول عليها باستخدام أسلوب بيز تحت دالة الخسارة لـ NLINEX) (Lindley,1972) (Box and Tiao,1973: وان الصيغة الرياضية لها:

$$TC_{(n)} = C_{(n)} + PR = C_0 + C\,n + PR \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(7)$$

إذاِنَ:

C_0 تمثل كلفة إعداد المعاينة وهو كمية ثابتة أو أي كلفة أخرى ذات علاقة بأخذ العينة، أما C هي كلفة المعاينة لكل وحدة. وان $C_{(0)}=0$ وان $n>0$

في حالة اعتماد دالة الكلفة الكلية الموضحة في المعادلة (7) على المشاهدات سوف يتم أخذ التوقع لها ومن ضمنها دالة المخاطرة اللاحقة ليكون شكل الدالة على النحو الآتي:

$$E(TC_{(n)}) = C_{(n)} + E(PR) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(8)$$

لغرض $\frac{\partial E(TC_{(n)})}{\partial n} = 0$ مع مساواة المشتقة بالصفر ومن ثم يتم اشتقاق المعادلة (8) نسبةً إلى n وهو أحد أهداف البحث. الحصول على حجم العينة الأمثل تحت دالة الخسارة لـ NLINEX.

المخاطرة اللاحقة Posterior Risk:

عند توفر PR يتم الحصول على هذه الدالة من خلال أخذ التوقع لدالة الخسارة ويرمز لها بالرمز التوزيع اللاحق بالشكل التالي:

$$PR = E_\theta(L(\hat{\theta},\theta)) = \int_\theta L(\hat{\theta},\theta)\, P(\theta \,|\, \underline{X})\, d\theta$$

وان دالة المخاطرة اللاحقة تحت دالة خسارة آسية لاخطية (NLINEX) الموضحة في المعادلة رقم (5) لمقدر بيز لـ θ هو:

$$PR(\hat{\theta},\theta) = E_\theta(L(\hat{\theta},\theta) \,|\, \underline{X}) = k[e^{b\hat{\theta}} E(e^{-b\theta} \,|\, \underline{X}) + bE(\hat{\theta}-\theta)^2 - bE(\hat{\theta}-\theta) - 1]$$

$$PR = E_\theta(L(\hat{\theta},\theta)) = \int_\theta k[e^{b(\hat{\theta}-\theta)} + b(\hat{\theta}-\theta)^2 - b(\hat{\theta}-\theta) - 1]\, P(\theta \mid \underline{X})\, d\theta$$

$$= k[e^{b\hat{\theta}}\, E_\theta(e^{-b\theta} \mid \underline{X}) - b\hat{\theta} + b\, E_\theta(\theta \mid \underline{X}) - 1 + b Var(\theta \mid \underline{X})]$$

$$= k[e^{b\hat{\theta}}\, e^{-b\hat{\theta}} - b\hat{\theta} + b\, m_\theta - 1 + b Var(\theta \mid \underline{X})]$$

$$= k[1 - b\hat{\theta} + b\, m_\theta - 1 + b Var(\theta \mid \underline{X})]$$

$$\therefore PR_{NLINEX} = k\, b[m_\theta - \hat{\theta}_{NLINEX} + Var(\theta \mid \underline{X})] \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(9)$$

توزيع ويبل Weibull Distribution:

يعد توزيع ويبل من التوزيعات المهمة والواسعة التطبيق في مجالات الحياة العملية إذ يقترب من التوزيع الطبيعي عندما تكون معلمة الشكل $\beta \geq 3$ (مروان طارق،2011) وهذا التوزيع له دور في مجالات مختلفة منها الهندسة الصناعية التي تهتم بدراسة الجهد في أوقات التسليم والتصنيع وتم استخدامه في التنبؤ لحالة الطقس فضلا" عن استخدامه في مجال المعولية (الوثوقية) ودوال البقاء في مجال الطبي.

تعرف دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع ويبل ذي معلمتين θ,β وبالشكل التالي:

$$p(x;\theta,\beta) = \frac{\beta}{\theta} x^{\beta-1} e^{-\frac{x^\beta}{\theta}} \qquad ; x \geq 0 \;;\; \theta,\beta > 0 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(10)$$ إذإنَ:

θ) تمثل معلمة القياس :scale parameter.(

β) تمثل معلمة الشكل :shape parameter.(

يمكن الحصول على توزيع ويبل ذو معلمتين بطرق متعددة مثل تحويل جاكوبي (Jacobian Transformation) أو باستخدام دالة التوزيع التراكمية (Cumulative Distributionfunction) أو باستخدام العزوم لمعلمتي توزيع ويبل (Moment of twoparameter Weibull distribution) (Ahmad,2013) وسوف يتم تقدير معلمتي توزيع ويبل عندما تكون المعلومات حول المعلمة (θ) (Informative) ومعتمدين على التوزيع اللاحق وفق نظرية NLINEX) وتحت دالة خسارة آسية لاخطية بيز وعلى النحو الآتي:

1− تحديد حجم العينة الأمثل لتقدير معلمة توزيع ويبل عندما تكون معلمة الشكل معلومة:

افترض أن ($x_1,x_2,..,x_n$ عينة عشوائية بحجم n) مأخوذة من توزيع ويبل ذ ي معلمتين الموضحة بالمعادلة رقم (10:) وان دالة الإمكان هي:

$$P(\underline{X} \mid \theta) = \left(\frac{\beta}{\theta}\right)^n \prod_{i=1}^{n} x_i^{\beta-1} e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^\beta}{\theta}} \propto \left(\frac{1}{\theta}\right)^n e^{-\frac{t}{\theta}} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(11)$$

إذاًن: $t = \sum_{i=1}^{n} x_i^{\beta}$

وان التوزيع الأولي المرافق لـ θ (Conjugate Prior) يتبع توزيع معكوس كاما ($IGamma(\alpha_0,\beta_0)$) وفق الموضحة أدناه:(Rinne,2009)

$$p(\theta) = \frac{\beta_0^{\alpha_0}}{\Gamma\alpha_0}\,\theta^{-(\alpha_0+1)}\;e^{-\frac{\beta_0}{\theta}} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(12)$$

سوف نحصل على التوزيع اللاحق لـ θ (Lindley,1972) الصيغة الرياضية لنظرية بيز الموضحة أدناه بالاعتماد على المعادلة (11) و (12) وبالشكل التالي:

$$P(\theta\,|\,\underline{X}) \propto P(\theta)\,P(\underline{X}\,|\,\theta)$$

$$\propto \theta^{-(\alpha_0+1)}\,e^{-\frac{\beta_0}{\theta}}\,\theta^{-n}e^{-\frac{t}{\theta}} \propto \theta^{-[(\alpha_0+n)+1]}\,e^{-\frac{(\beta_0+t)}{\theta}}$$

إذاًن:

$$\theta\,|\,\underline{X} \sim IGamma(\alpha_0+n\,,\beta_0+t)$$

وعليه فإنًّ:

$$P(\theta\,|\,\underline{X}) = \frac{(\beta_0+t)^{(\alpha_0+n)}}{\Gamma(\alpha_0+n)}\,\theta^{-[(\alpha_0+n)+1]}\;e^{-\frac{(\beta_0+t)}{\theta}} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(13)$$

فإنًّ التوقع والتباين للتوزيع اللاحق الموضح في المعادلة (13) فضلاً عن مقدر بيز لـ θ تحت دالة خسارة الخطأ التربيعي حسب المعادلة رقم (2) بالشكل التالي:

$$\left.\begin{aligned} m_\theta = \hat{\theta}_{SE} = E_\theta(\theta\,|\,\underline{X}) &= \frac{\beta_0+t}{\alpha_0+n-1} \\ Var(\theta\,|\,\underline{X}) &= \frac{(\beta_0+t)^2}{(\alpha_0+n-1)^2(\alpha_0+n-2)} \end{aligned}\right\} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(14)$$

ولتحديد حجم العينة الأمثل عن طريق دالة الكلفة الكلية $TC_{(n)}$ حسب المعادلة (7) التي تجمع بين الكلفة الخطية ودالة المخاطرة اللاحقة في المعادلة (9) وعلى النحو الآتي:

$$TC_{(n)} = C_0 + C\,n + PR_{NLINEX} = C_0 + C\,n + k\,b[m_\theta - \hat{\theta}_{NLINEX} + Var(\theta\,|\,\underline{X})]$$

وبتعويض مقدر بيز تحت دالة الخسارة NLINEX في المعادلة (6) سوف نحصل على:

$$TC_{(n)} = C_0 + C\,n + k\,b[m_\theta - [-\frac{1}{(b+2)} Ln[E(e^{-b\theta} \mid \underline{X})] + \frac{2}{(b+2)} E(\theta \mid \underline{X})] + Var(\theta \mid \underline{X})] \ldots (15)$$

يتم إيجاد التوقع الشرطي لـ $e^{-b\theta} \mid \underline{X}$ على النحو الآتي:

$$E(e^{-b\theta} \mid \underline{X}) = \int_0^\infty e^{-b\theta} \frac{(\beta_0 + t)^{(\alpha_0 + n)}}{\Gamma(\alpha_0 + n)} \theta^{-[(\alpha_0 + n)+1]} e^{-\frac{(\beta_0 + t)}{\theta}} d\theta$$

وبما أن $e^{-b\theta} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-b\theta)^r}{r!}$ فان:

$$E(e^{-b\theta} \mid \underline{X}) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-b)^r}{r!} \frac{(\beta_0 + t)^{(\alpha_0 + n)}}{\Gamma(\alpha_0 + n)} \int_0^\infty \theta^{-[(\alpha_0 + n - r)+1]} e^{-\frac{(\beta_0 + t)}{\theta}} d\theta$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-b)^r}{r!} \frac{(\beta_0 + t)^{(\alpha_0 + n)}}{\Gamma(\alpha_0 + n)} \frac{\Gamma(\alpha_0 + n - r)}{(\beta_0 + t)^{(\alpha_0 + n)} (\beta_0 + t)^{-r}}$$

$$\therefore E(e^{-b\theta} \mid \underline{X}) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-b(\beta_0 + t))^r}{r!} \frac{\Gamma(\alpha_0 + n - r)}{\Gamma(\alpha_0 + n)}$$

وبالإمكان الحصول على مقدر بيز تحت دالة الخسارة LINEX حسب المعادلة (4) بالشكل التالي:

وعليه $$\therefore \hat{\theta}_{LINEX} = -\frac{1}{b} Ln\,[\sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-b(\beta_0 + t))^r}{r!} \frac{\Gamma(\alpha_0 + n - r)}{\Gamma(\alpha_0 + n)}] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (16)$$

من خلال المعادلة (6) ووفق التركيبة الخطية NLINEX يمكن الحصول على مقدر بيز تحت دالة الخسارة بين المعادلة (14) و (16) وبالشكل التالي:

$$\therefore \hat{\theta}_{NLINEX} = \frac{1}{(b+2)} [-Ln\,[\sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-b(\beta_0 + t))^r}{r!} \frac{\Gamma(\alpha_0 + n - r)}{\Gamma(\alpha_0 + n)}] + 2 \frac{(\beta_0 + t)}{(\alpha_0 + n - 1)}] \ \ldots (17)$$

من متسلسلة ماكلورين لغرض التقريب وتسهيل $e^{-b\theta} \mid \underline{X}$ وبأخذ الحد الأول والثاني والثالث للتوقع الشرطي الحل.

$$E(e^{-b\theta} \mid \underline{X}) = 1 - \frac{b(\beta_0 + t)}{1!} \frac{\Gamma(\alpha_0 + n - 1)}{\Gamma(\alpha_0 + n)} + \frac{b^2 (\beta_0 + t)^2}{2!} \frac{\Gamma(\alpha_0 + n - 2)}{\Gamma(\alpha_0 + n)}$$

$$= 1 + [\frac{-b(\beta_0 + t)}{(\alpha_0 + n - 1)} + \frac{b^2 (\beta_0 + t)^2}{2(\alpha_0 + n - 1)(\alpha_0 + n - 2)}]$$

وبتعويضها في المعادلة (15) بعد اخذ الحد الأول من متسلسلة ماكلورين وبالشكل التالي:

$$Ln[1+(\frac{-b(\beta_0+t)}{(\alpha_0+n-1)}+\frac{b^2(\beta_0+t)^2}{2(\alpha_0+n-1)(\alpha_0+n-2)})]$$
$$=\frac{-b(\beta_0+t)}{(\alpha_0+n-1)}+\frac{b^2(\beta_0+t)^2}{2(\alpha_0+n-1)(\alpha_0+n-2)}$$

وعليه فإنَ:

$$TC_{(n)}=C_0+C\,n+$$
$$k\,b[\frac{(\beta_0+t)}{(\alpha_0+n-1)}-[-\frac{1}{(b+2)}(\frac{-b(\beta_0+t)}{(\alpha_0+n-1)}+\frac{b^2(\beta_0+t)^2}{2(\alpha_0+n-1)(\alpha_0+n-2)})+$$
$$\frac{2}{(b+2)}\frac{(\beta_0+t)}{(\alpha_0+n-1)}]+\frac{(\beta_0+t)^2}{(\alpha_0+n-1)^2(\alpha_0+n-2)}]$$

$$TC_{(n)}=C_0+C\,n+k\,b[\frac{(\beta_0+t)}{(\alpha_0+n-1)}(\frac{b+2-b-2}{b+2})+\frac{(\beta_0+t)^2}{(\alpha_0+n-1)(\alpha_0+n-2)}$$
$$(\frac{b^2(\alpha_0+n-1)+2(b+2)}{2(b+2)(\alpha_0+n-1)})]$$

$$\therefore TC_{(n)}=C_0+C\,n+\frac{k\,b\,[b^2(\alpha_0+n-1)+2(b+2)](\beta_0+t)^2}{2(b+2)(\alpha_0+n-1)^2(\alpha_0+n-2)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(18)$$

لذلك يتم اخذ التوقع لدالة الكلفة الكلية $t=\sum_{i=1}^{n}x_i^{\beta}$ من خلال X نلاحظ اعتماد المعادلة (18) على المتغير

مع المعلمات المجهولة بالاعتماد على توزيع كاما− X حسب المعادلة (8) لغرض التخلص من المتغير

وعلى النحو الآتي: (n,α_0,β_0) وبمعلمات كاما(Bernardo and Smith,1994

$$E(TC_{(n)}) = C_0 + C\,n + \frac{k\,b\,[b^2(\alpha_0+n-1)+2(b+2)]}{2(b+2)(\alpha_0+n-1)^2} E\left(\frac{(\beta_0+t)^2}{(\alpha_0+n-2)}\right) \text{........}(19)$$

$$\therefore P(t) = \frac{\beta_0^{\alpha_0} \overline{)\alpha_0+n}}{\overline{)\alpha_0}\,\overline{)n}} \frac{t^{\alpha_0-1}}{(\beta_0+t)^{\alpha_0+n}} \quad ; \; t \geq 0$$

$$E\left(\frac{(\beta_0+t)^2}{(\alpha_0+n-2)}\right) = \int_0^\infty \frac{(\beta_0+t)^2}{(\alpha_0+n-2)} p(t)\,dt$$

$$= \frac{\beta_0^{\alpha_0} \overline{)\alpha_0+n}}{\overline{)\alpha_0}\,\overline{)n}(\alpha_0+n-2)} \int_0^\infty \frac{t^{\alpha_0-1}}{(\beta_0+t)^{\alpha_0+n-2}}\,dt$$

$$= \frac{\beta_0^{\alpha_0} \overline{)\alpha_0+n}}{\overline{)\alpha_0}\,\overline{)n}(\alpha_0+n-2)} \frac{\overline{)\alpha_0-2}\,\overline{)n}}{\beta_0^{\alpha_0-2}\overline{)(\alpha_0+n-2)}}$$

$$E\left(\frac{(\beta_0+t)^2}{(\alpha_0+n-2)}\right) = \frac{(\alpha_0+n-1)\,\beta_0^2}{(\alpha_0-1)(\alpha_0-2)}$$

وبتعويض النتيجة أعلاه في المعادلة (19) لنحصل على:

$$\therefore E(TC_{(n)}) = C_0 + C\,n + \frac{k\,b\,[b^2(\alpha_0+n-1)+2(b+2)]\;\beta_0^2}{2(b+2)(\alpha_0-1)(\alpha_0-2)(\alpha_0+n-1)} \quad \text{..........}(20)$$

إذاٍنَ $\alpha_0 > 2$:

وبأخذ المشتقة للمعادلة (20) نسبةً إلى n مع مساواة المشتقة بالصفر $\frac{\partial E(TC_{(n)})}{\partial n} = 0$ لنحصل على

حجم العينة الأمثل تحت دالة خسارة آسية لاخطية (NLINEX:) بعد خطوات من التبسيط وبالشكل التالي:

$$\frac{\partial E(TC_{(n)})}{\partial n} = C + \frac{k\,b^3\,\beta_0^2}{2(b+2)(\alpha_0-1)(\alpha_0-2)(\alpha_0+n-1)} - \frac{k\,b\,\beta_0^2\,[b^2(\alpha_0+n-1)+2(b+2)]}{2(b+2)(\alpha_0-1)(\alpha_0-2)(\alpha_0+n-1)^2} = 0$$

$$\frac{\partial E(TC_{(n)})}{\partial n} = C + \frac{k\,b\,\beta_0^2}{2(b+2)(\alpha_0-1)(\alpha_0-2)(\alpha_0+n-1)} \left[\frac{-2(b+2)}{(\alpha_0+n-1)}\right] = 0$$

$$= C - \frac{2(b+2)k\,b\,\beta_0^2}{2(b+2)(\alpha_0-1)(\alpha_0-2)(\alpha_0+n-1)^2} = 0$$

$$C = \frac{k\, b\, \beta_0^2}{(\alpha_0 - 1)(\alpha_0 - 2)(\alpha_0 + n - 1)^2}$$

$$(\alpha_0 + n - 1)^2 = \frac{k\, b\, \beta_0^2}{(\alpha_0 - 1)(\alpha_0 - 2)\, C}$$

$$\therefore n^* = \sqrt{\frac{k\, b\, \beta_0^2}{(\alpha_0 - 1)(\alpha_0 - 2)\, C}} - (\alpha_0 - 1) \quad ; \; \alpha_0 > 2 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(21)$$

إذن المعادلة (21) تمثل حجم العينة الأمثل (n^*) من خلال (NLINEX) تحت دالة خسارة آسية لاخطية (Lindley,1972.) وجود دالة المخاطرة الموضحة في المعادلة(9) في دالة الكلفة الكلية

2-تحديد حجم العينة الأمثل عندما تكون معلمتي توزيع ويبل غير معلومة

بالاعتماد على دالة الكثافة الاحتمالية في المعادلة (10) والتي تكون فيها كلتا المعلمتين غير معلومة في هذا التوزيع، لذلك فإننا سوف نتبع أسلوب (Soland,1969) في تقدير معلمات التوزيع من بين أساليب مختلفة في عملية التقدير إذ تكون فيها معلمة القياس لها توزيع سابق مستمر ولمعلمة الشكل توزيع سابق متقطع وكالآتي.

افترض أن معلمة الشكل (β) وهي مقيدة بعدد محدد من القيم $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_j$ وباحتمالات سابقة ($\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_j$) خاصة بكل قيمة من قيم β بحيث إنَ ($0 \le \gamma_j \le 1$) وإنَ $\sum_{j=1}^{z} \gamma_j = 1$ فإنَ:

$$P(\beta = \beta_j) = \gamma_j \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(22)$$

وإنَ التوزيع السابق المرافق لـ (θ) Conjugate Prior والمشروط بـ ($\beta = \beta_j$) يتبع توزيع معكوس كاما ($IGamma(\alpha_j, \lambda_j)$) وهو:

$$P(\theta \mid \beta = \beta_j) = \frac{\lambda_j^{\alpha_j}}{\Gamma \alpha_j}\, \theta^{-(\alpha_j + 1)}\, e^{-\frac{\lambda_j}{\theta}} \quad ; \theta \ge 0 \,; \alpha_j, \lambda_j > 0 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(23)$$

وإنَ التوزيع الاحتمالي للعينة (دالة الإمكان) حسب المعادلة (11) لنحصل على دالة الكثافة الاحتمالية اللاحقة المشروطة لـ θ بالشكل التالي:

$$P(\theta \mid \beta=\beta_j, \underline{X}) = \frac{P(\underline{X} \mid \theta,\beta)\, P(\theta \mid \beta=\beta_j)}{\int_0^\infty P(\underline{X} \mid \theta,\beta)\, P(\theta \mid \beta=\beta_j)\, d\theta}$$

$$= \frac{\beta^n \prod_{i=1}^{n} x_i^{\beta-1}\, \frac{\lambda_j^{\alpha_j}}{\Gamma\alpha_j}\, \theta^{-[(\alpha_j+n)+]}\, e^{-\frac{1}{\theta}(\lambda_j+\sum_{i=0}^{n} x_i^{\beta})}}{\beta^n \prod_{i=1}^{n} x_i^{\beta-1}\, \frac{\lambda_j^{\alpha_j}}{\Gamma\alpha_j} \int_0^\infty \theta^{-[(\alpha_j+n)+]}\, e^{-\frac{1}{\theta}(\lambda_j+\sum_{i=0}^{n} x_i^{\beta})}\, d\theta}$$

$$= \frac{\theta^{-[(\alpha_j+n)+]}\, e^{-\frac{1}{\theta}(\lambda_j+\sum_{i=0}^{n} x_i^{\beta})}}{\frac{\Gamma\alpha_j+n}{(\lambda_j+\sum_{i=0}^{n} x_i^{\beta})^{(\alpha_j+n)}} \int_0^\infty \frac{(\lambda_j+\sum_{i=0}^{n} x_i^{\beta})^{(\alpha_j+n)}}{\Gamma\alpha_j+n}\, \theta^{-[(\alpha_j+n)+]}\, e^{-\frac{1}{\theta}(\lambda_j+\sum_{i=0}^{n} x_i^{\beta})}\, d\theta}$$

$$\therefore P(\theta \mid \beta=\beta_j, \underline{X}) = \frac{(\lambda_j+t)^{(\alpha_j+n)}}{\Gamma\alpha_j+n}\, \theta^{-[(\alpha_j+n)+]}\, e^{-\frac{1}{\theta}(\lambda_j+t)} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(24)$$

إذإنَ: $t=\sum_{i=0}^{n} x_i^{\beta}$

وإنَ التوقع والتباين اللاحقين للمعلمة θ يكونان بالصيغة الآتية:

$$\left.\begin{aligned} E(\theta \mid \beta=\beta_j, \underline{X}) &= \frac{(\lambda_j+t)}{(\alpha_j+n-1)} \\ Var(\theta \mid \beta=\beta_j, \underline{X}) &= \frac{(\lambda_j+t)^2}{(\alpha_j+n-1)^2(\alpha_j+n-2)} \end{aligned}\right\} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(25)$$

بالاعتماد على المعادلات $\beta=\beta_j$ وسوف يتم الحصول على دالة الكثافة الاحتمالية اللاحقة الهامشية لـ
(11) و (22) و (23) وكالآتي:

نفرض أن:

$$P_j = P(\beta=\beta_j \mid \underline{X}) = A\int_0^\infty P(\theta,\beta \mid \underline{X})\, d\theta$$

$$\therefore P(\theta,\beta \mid \underline{X}) \propto P(\theta,\beta)\, P(\underline{X} \mid \theta,\beta) \propto P(\beta=\beta_j)\, P(\theta \mid \beta=\beta_j)\, P(\underline{X} \mid \theta,\beta)$$

$$P(\theta,\beta\,|\,\underline{X}) \propto \gamma_j \frac{\lambda_j^{\alpha_j}}{\Gamma(\alpha_j)}\, \theta^{-[(\alpha_j+n)+1]}\, e^{-\frac{1}{\theta}(\lambda_j+\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^{\beta})}\, \beta^n\, e^{(\beta-1)\sum\limits_{i=1}^{n} Ln(x_i)}$$

$$\propto \gamma_j \frac{\lambda_j^{\alpha_j}}{\Gamma(\alpha_j)}\, \theta^{-[(\alpha_j+n)+1]}\, e^{-\frac{1}{\theta}(\lambda_j+\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^{\beta})}\, \beta^n\, e^{\beta\sum\limits_{i=1}^{n} Ln(x_i)}\, \underbrace{e^{-1\sum\limits_{i=1}^{n} Ln(x_i)}}_{Cons\tan t}$$

$$P(\theta,\beta\,|\,\underline{X}) \propto \gamma_j \frac{\lambda_j^{\alpha_j}}{\Gamma(\alpha_j)}\, \theta^{-[(\alpha_j+n)+1]}\, e^{-\frac{1}{\theta}(\lambda_j+t)}\, \beta^n\, e^{\beta W}$$

إذإنَ: $W = \sum\limits_{i=1}^{n} Ln(x_i) \quad ; t = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^{\beta}$

وبتعويض النتيجة أعلاه في دالة الكثافة الاحتمالية اللاحقة الهامشية لنحصل على:

$$P_j = P(\beta=\beta_j\,|\,\underline{X}) = A\int_0^{\infty} \gamma_j \frac{\lambda_j^{\alpha_j}}{\Gamma(\alpha_j)}\, \theta^{-[(\alpha_j+n)+1]}\, e^{-\frac{1}{\theta}(\lambda_j+t)}\, \beta^n\, e^{\beta W}\, d\theta$$

$$= \frac{A\gamma_j \lambda_j^{\alpha_j} \beta^n\, e^{\beta W}}{\Gamma(\alpha_j)} \int_0^{\infty} \theta^{-[(\alpha_j+n)+1]}\, e^{-\frac{1}{\theta}(\lambda_j+t)}\, d\theta$$

$$\therefore P_j = P(\beta=\beta_j\,|\,\underline{X}) = \frac{A\gamma_j \lambda_j^{\alpha_j} \beta^n\, e^{\beta_j W}}{\Gamma(\alpha_j)} \frac{\Gamma(\alpha_j+n)}{(\lambda_j+t)^{(\alpha_j+n)}} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(26)$$

$$A^{-1} = \sum_{j=1}^{z} \frac{\gamma_j \lambda_j^{\alpha_j} \beta^n\, e^{\beta_j W}}{\Gamma(\alpha_j)} \frac{\Gamma(\alpha_j+n)}{(\lambda_j+t)^{(\alpha_j+n)}}$$:إذإنَ

الآن يتم إيجاد مقدر بيز لـ θ تحت دالة خسارة الخطأ التربيعي معتمدين فيها على المعادلة (24) و (26) وعلى النحو الآتي:

$$\hat{\theta}_{SE} = E(\theta\,|\,\underline{X}) = \int_0^{\infty} \theta \sum_{j=1}^{z} P_j\; p(\theta\,|\,\beta=\beta_j,\underline{X})\, d\theta$$

$$\hat{\theta}_{SE} = E(\theta\,|\,\underline{X}) = \sum_{j=1}^{z} P_j \frac{(\lambda_j+t)^{(\alpha_j+n)}}{\Gamma(\alpha_j+n)} \int_0^{\infty} \theta^{-[(\alpha_j+n-1)+1]}\, e^{-\frac{(\lambda_j+t)}{\theta}}\, d\theta$$

$$\hat{\theta}_{SE} = E(\theta\,|\,\underline{X}) = \sum_{j=1}^{z} P_j \frac{(\lambda_j+t)^{(\alpha_j+n)}}{\Gamma(\alpha_j+n)} \frac{\Gamma(\alpha_j+n-1)}{(\lambda_j+t)^{(\alpha_j+n-1)}}$$

$$\therefore \hat{\theta}_{SE} = E(\theta|\underline{X}) = \sum_{j=1}^{z} P_j \frac{(\lambda_j + t)}{(\alpha_j + n - 1)} = m_\theta \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(27)$$

أما التباين لها هو:

$$Var(\theta|\underline{X}) = E(\theta^2|\underline{X}) - [E(\theta|\underline{X})]^2$$

$$E(\theta^2|\underline{X}) = \int_0^\infty \theta^2 \sum_{j=1}^{z} P_j\, P(\theta|\beta=\beta_j,\underline{X})\, d\theta$$

$$= \sum_{j=1}^{z} P_j \frac{(\lambda_j + t)^{(\alpha_j+n)}}{\Gamma(\alpha_j + n)} \int_0^\infty \theta^{-[(\alpha_j+n-2)+1]}\, e^{-\frac{(\lambda_j+t)}{\theta}}\, d\theta$$

$$= \sum_{j=1}^{z} P_j \frac{(\lambda_j + t)^{(\alpha_j+n)}}{\Gamma(\alpha_j + n)} \frac{\Gamma(\alpha_j + n - 2)}{(\lambda_j + t)^{(\alpha_j+n-2)}} = \sum_{j=1}^{z} P_j \frac{(\lambda_j + t)^2}{(\alpha_j + n - 1)(\alpha_j + n - 2)}$$

$$\therefore Var(\theta|\underline{X}) = \sum_{j=1}^{z} P_j \frac{(\lambda_j + t)^2}{(\alpha_j + n - 1)(\alpha_j + n - 2)} - [\sum_{j=1}^{z} P_j \frac{(\lambda_j + t)}{(\alpha_j + n - 1)}]^2$$

$$= \sum_{j=1}^{z} P_j \frac{(\lambda_j + t)^2}{(\alpha_j + n - 1)} [\frac{1}{(\alpha_j + n - 2)} - \sum_{j=1}^{z} P_j \frac{1}{(\alpha_j + n - 1)}]$$

$$\therefore Var(\theta|\underline{X}) = \sum_{j=1}^{z} P_j \frac{(\lambda_j + t)^2[(\alpha_j + n - 1) - \sum_{j=1}^{z} P_j(\alpha_j + n - 2)]}{(\alpha_j + n - 1)^2(\alpha_j + n - 2)} \qquad \ldots\ldots\ldots(28)$$

أما مقدر بيز لـ β تحت دالة خسارة الخطأ التربيعي معتمدين فيها على المعادلة (26) فتكون بالصيغة التالية:

$$\hat{\beta}_{SE} = E(\beta=\beta_j|\underline{X}) = \sum_{j=1}^{z} \beta_j\, p(\beta=\beta_j|\underline{X}) = \sum_{j=1}^{z} \beta_j\, P_j = m_\beta \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(29)$$

وان التباين سيكون:

$$Var(\beta=\beta_j|\underline{X}) = E(\beta^2=\beta_j^2|\underline{X}) - [E(\beta=\beta_j|\underline{X})]^2$$

$$E(\beta^2=\beta_j^2|\underline{X}) = \sum_{j=1}^{z} \beta_j^2\, p(\beta=\beta_j|\underline{X}) = \sum_{j=1}^{z} \beta_j^2\, P_j$$

$$\therefore Var(\beta=\beta_j|\underline{X}) = \sum_{j=1}^{z} \beta_j^2\, P_j - [\sum_{j=1}^{z} \beta_j\, P_j]^2 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(30)$$

والتي تكون معلمة LINEX تحت دالة الخسارة الآسية (θ) وبنفس الأسلوب يتم الحصول على مقدر بيز لـ
وعلى النحو $e^{-b\theta}$ مستمرة وبالاعتماد على المعادلة (4) فضلاً عن استخدام متسلسلة ماكلورين لإيجاد الآتي:

$$\hat{\theta}_{LINEX} = -\frac{1}{b} Ln[E(e^{-b\theta} \mid \underline{X})]$$

$$\therefore E(e^{-b\theta} \mid \underline{X}) = \int_0^\infty e^{-b\theta} \sum_{j=1}^{z} P_j \; P(\theta \mid \beta = \beta_j, \underline{X})\, d\theta$$

$$= \sum_{j=1}^{z} P_j \frac{(\lambda_j + t)^{(\alpha_j + n)}}{\Gamma(\alpha_j + n)} \int_0^\infty \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-b\theta)^r}{r!}\, \theta^{-[(\alpha_j + n) + 1]}\, e^{-\frac{(\lambda_j + t)}{\theta}}\, d\theta$$

$$E(e^{-b\theta} \mid \underline{X}) = \sum_{j=1}^{z} P_j \frac{(\lambda_j + t)^{(\alpha_j + n)}}{\Gamma(\alpha_j + n)} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-b)^r}{r!} \int_0^\infty \theta^{-[(\alpha_j + n - r) + 1]}\, e^{-\frac{1}{\theta}(\lambda_j + t)}\, d\theta$$

$$= \sum_{j=1}^{z} P_j \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-b)^r}{r!} \frac{(\lambda_j + t)^{(\alpha_j + n)}}{\Gamma(\alpha_j + n)} \frac{\Gamma(\alpha_j + n - r)}{(\lambda_j + t)^{(\alpha_j + n - r)}}$$

$$\therefore E(e^{-b\theta} \mid \underline{X}) = \sum_{j=1}^{z} P_j \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-b)^r}{r!} \frac{(\lambda_j + t)^r\, \Gamma(\alpha_j + n - r)}{\Gamma(\alpha_j + n)}$$

إذن فإنَ:

$$\therefore \hat{\theta}_{LINEX} = -\frac{1}{b} Ln[\sum_{j=1}^{z} P_j \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-b)^r}{r!} \frac{(\lambda_j + t)^r\, \Gamma(\alpha_j + n - r)}{\Gamma(\alpha_j + n)}] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(31)$$

أما مقدر بيز لـ (β) والتي تكون معلمة متقطعة ستكون معلمة الشكل تحت دالة الخسارة الآسية LINEX:

$$\hat{\beta}_{LINEX} = -\frac{1}{b} Ln[E(e^{-b\beta_j} \mid \underline{X})]$$

$$\therefore E(e^{-b\beta_j} \mid \underline{X}) = \sum_{j=1}^{z} e^{-b\beta_j}\; p(\beta = \beta_j \mid \underline{X}) = \sum_{j=1}^{z} e^{-b\beta_j}\; P_j$$

$$\therefore \hat{\beta}_{LINEX} = -\frac{1}{b} Ln[\sum_{j=1}^{z} e^{-b\beta_j}\; P_j] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(32)$$

(انظر المصدر Soland,1969) (Morteza, Farhad Manoochehr,2012.)

وبالاعتماد على دالة الخسارة الآسية اللاخطية (NLINEX) المقترحة من قبل (Saiful Islam, Roy and Ali,2004) لتقدير كل من معلمة الشكل والقياس (θ,β) لتوزيع ويبل ذو معلمتين وفق المعادلة (6) ومستندين فيها على المعادلة (27) و (29) و (31) و (32) لنحصل على:

$$\hat{\theta}_{NLINEX}=\frac{1}{(b+2)}[b\,\hat{\theta}_{LINEX}+2\,\hat{\theta}_{SE}]$$

وان

$$\therefore \hat{\theta}_{NLINEX}=\frac{-1}{(b+2)}Ln[\sum_{j=1}^{z}P_j\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-b)^r}{r!}\frac{(\lambda_j+t)^r\,\Gamma(\alpha_j+n-r)}{\Gamma(\alpha_j+n)}]+\frac{2}{(b+2)}\sum_{j=1}^{z}P_j\frac{(\lambda_j+t)}{(\alpha_j+n-1)}] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(33)$$

$$\hat{\beta}_{NLINEX}=\frac{1}{(b+2)}[b\,\hat{\beta}_{LINEX}+2\,\hat{\beta}_{SE}]$$

$$=\frac{1}{(b+2)}[-Ln[\sum_{j=1}^{z}e^{-b\beta_j}\,P_j]+2\sum_{j=1}^{z}\beta_j\,P_j]$$

$$\therefore \hat{\beta}_{NLINEX}=\frac{-1}{(b+2)}Ln[\sum_{j=1}^{z}e^{-b\beta_j}\,P_j]+\frac{2}{(b+2)}\sum_{j=1}^{z}\beta_j\,P_j \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(34)$$

للحصول على حجم العينة الأمثل تحت دالة خسارة (NLINEX من خلال دالة الكلفة الكلية ($TC_{(n)}$) في بنفس الخطوات المتبعة في تحديد θ المعادلة (7) وبوجود دالة المخاطرة اللاحقة في المعادلة (9) نسبةً إلى حجم العينة الأمثل عندما كانت معلمة الشكل معلومة وبالشكل التالي:

$$TC_{(n)}=C_0+C\,n+PR_{NLINEX}$$

$$=C_0+C\,n+k\,b\,[m_\theta-\hat{\theta}_{NLINEX}+Var(\theta\,|\,\underline{X})]$$

$$=C_0+C\,n+k\,b\,[\sum_{j=1}^{z}P_j\frac{(\lambda_j+t)}{(\alpha_j+n-1)}-[\frac{-1}{(b+2)}Ln[\sum_{j=1}^{z}P_j\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-b)^r}{r!}\frac{(\lambda_j+t)^r\,\Gamma(\alpha_j+n-r)}{\Gamma(\alpha_j+n)}]$$

$$+\frac{2}{(b+2)}\sum_{j=1}^{z}P_j\frac{(\lambda_j+t)}{(\alpha_j+n-1)}]+\sum_{j=1}^{z}P_j\frac{(\lambda_j+t)^2[(\alpha_j+n-1)-\sum_{j=1}^{z}P_j(\alpha_j+n-2)]}{(\alpha_j+n-1)^2(\alpha_j+n-2)}]$$

وبأخذ الحد الأول والثاني من متسلسلة ماكلورين لغرض التبسيط وتسهيل الحل لنحصل على:

$$TC_{(n)} = C_0 + C\,n + k\,b\,[\sum_{j=1}^{z} P_j \frac{(\lambda_j + t)}{(\alpha_j + n - 1)}(1 - \frac{2}{(b+2)}) + \frac{1}{(b+2)} Ln[\sum_{j=1}^{z} P_j\,(1 - \frac{b(\lambda_j + t)}{(\alpha_j + n - 1)})]$$

$$+ \sum_{j=1}^{z} P_j \frac{(\lambda_j + t)^2[(\alpha_j + n - 1) - \sum_{j=1}^{z} P_j(\alpha_j + n - 2)]}{(\alpha_j + n - 1)^2(\alpha_j + n - 2)}]$$

$$\therefore TC_{(n)} = C_0 + C\,n + k\,b\,[\frac{b}{(b+2)} \sum_{j=1}^{z} P_j \frac{(\lambda_j + t)}{(\alpha_j + n - 1)} + \frac{1}{(b+2)} Ln[\sum_{j=1}^{z} P_j\,(1 - \frac{b(\lambda_j + t)}{(\alpha_j + n - 1)})]$$

$$+ \sum_{j=1}^{z} P_j \frac{(\lambda_j + t)^2[(\alpha_j + n - 1) - \sum_{j=1}^{z} P_j(\alpha_j + n - 2)]}{(\alpha_j + n - 1)^2(\alpha_j + n - 2)}] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(35)$$

علماً أن:

$$P_j = \frac{\gamma_j \lambda_j^{\alpha_j} \beta^n e^{\beta_j W}}{\Gamma\alpha_j} \frac{\Gamma(\alpha_j + n)}{(\lambda_j + t)^{(\alpha_j + n)}} \Bigg/ \sum_{j=1}^{z} \frac{\gamma_j \lambda_j^{\alpha_j} \beta^n e^{\beta_j W}}{\Gamma\alpha_j} \frac{\Gamma(\alpha_j + n)}{(\lambda_j + t)^{(\alpha_j + n)}} \quad \ldots\ldots\ldots(36)$$

نلاحظ من المعادلة (35) أنها تعتمد على المتغير X الموجودة في ($t = \sum_{i=1}^{n} x_i^{\beta}$ and $W = \sum_{i=1}^{n} Ln(x_i)$)
ولغرض التخلص منها ومن المعلمات المجهولة سوف يتم أخذ التوقع لدالة الكلفة الكلية وحسب المعادلة (8) مع استخدام أسلوب دالتا لغرض التقريب وتبسيط الحل (الخياط،باسل يونس، 1991) واخذ الحد الأول والثاني من عملية التقريب وعلى النحو الآتي:

$$E(TC_{(n)}) = C_0 + C\,n + k\,b\,E[\frac{b}{(b+2)} \sum_{j=1}^{z} P_j \frac{(\lambda_j + t)}{(\alpha_j + n - 1)} + \frac{1}{(b+2)} Ln[\sum_{j=1}^{z} P_j\,(1 - \frac{b(\lambda_j + t)}{(\alpha_j + n - 1)})]$$

$$+ \sum_{j=1}^{z} P_j \frac{(\lambda_j + t)^2[(\alpha_j + n - 1) - \sum_{j=1}^{z} P_j(\alpha_j + n - 2)]}{(\alpha_j + n - 1)^2(\alpha_j + n - 2)}]$$

فإذا كانت:

$$E(TC_{(n)}) = C_0 + C\,n + k\,b\,E(Y)$$

$$\mu_Y = E(Y) = [\frac{b}{(b+2)} \sum_{j=1}^{z} E(P_j) \frac{(\lambda_j + E(t))}{(\alpha_j + n - 1)} + \frac{1}{(b+2)} Ln[\sum_{j=1}^{z} E(P_j)\,(1 - \frac{b(\lambda_j + E(t))}{(\alpha_j + n - 1)})]$$

$$+ \sum_{j=1}^{z} E(P_j) \frac{(\lambda_j + E(t))^2[(\alpha_j + n - 1) - \sum_{j=1}^{z} E(P_j)(\alpha_j + n - 2)]}{(\alpha_j + n - 1)^2(\alpha_j + n - 2)}] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(37)$$

$$\therefore \mu_t = E(t) = E_\theta(E_X(t))$$

$$E_X(t) = E_X(\sum_{i=1}^{n} x_i^\beta) = E_X(x_1^\beta + x_2^\beta + \dots + x_n^\beta) = E_X(x_1^\beta) + E_X(x_2^\beta) + \dots + E_X(x_n^\beta)$$

وبأخذ حد من الحدود من العلاقة أعلاه ثم يتم تعميمها على باقي الحالات وبالشكل التالي:

$$E_X(x_1^\beta) = \int_0^\infty x_1^\beta\, P(x_1)\, dx_1 = \int_0^\infty x_1^\beta \frac{\beta}{\theta} x_1^{\beta-1} e^{-\frac{x_1^\beta}{\theta}} dx_1 = \int_0^\infty \frac{\beta}{\theta} x_1^{2\beta-1} e^{-\frac{x_1^\beta}{\theta}} dx_1$$

لنحصل على:

$$E_X(x_1^\beta) = \theta^{\frac{\beta}{\beta}} \Gamma\left(\frac{\beta}{\beta} + 1\right) = \theta\, \Gamma(2) = \theta \qquad \dots\dots\dots(38)$$

فان:(Ahmad,2013)(أمير حنا،1990) (عبد الجبار،سعد وخيرية،2011)

$$E_X(t) = \theta + \theta + \dots + \theta = n\,\theta$$

وعليه فإنَ:

$$\therefore \mu_t = E(t) = E_\theta(E_X(t)) = E_\theta(n\,\theta) = n\, E_\theta(\theta)$$

إذإنَ:

$$\theta \sim IGamma(\alpha_j, \beta_j)$$

وإنَ التوقع والتباين لها هو:

$$E(\theta) = \frac{\lambda_j}{(\alpha_j - 1)} \quad ; \quad Var(\theta) = \frac{\lambda_j^2}{(\alpha_j - 1)^2 (\alpha_j - 2)}$$

إذن:

$$\therefore \mu_t = E(t) = E_\theta(E_X(t)) = \frac{n\,\lambda_j}{(\alpha_j - 1)} \qquad \dots\dots\dots(39)$$

أما

$$\mu_W = E(W) = E_\theta(E_X(W)) = E_\theta(E_X(e^{\beta_j W})) \qquad ; \quad W = \sum_{i=1}^{n} Ln(x_i)$$

$$E_X(e^{\beta_j W}) = E_X(e^{\beta_j \sum_{i=1}^{n} Ln(x_i)}) = E_X(e^{\sum_{i=1}^{n} Ln(x_i^{\beta_j})}) = E_X(\prod_{i=1}^{n} x_i^{\beta_j})$$

$$\therefore E_X(\prod_{i=1}^{n} x_i^{\beta_j}) = \prod_{i=1}^{n} E_X(x_i^{\beta_j}) = \prod_{i=1}^{n} \theta^{\frac{\beta}{\beta}} \Gamma\left(\frac{\beta}{\beta} + 1\right) = \prod_{i=1}^{n} \theta\, \Gamma(2) = \prod_{i=1}^{n} \theta = n\,\theta$$

إذن:

$$\mu_W = E(e^{\beta_j W}) = E_\theta(n\,\theta) = n\,E_\theta(\theta)$$

$$\mu_W = E(W) = E_\theta(E_X(W)) = \frac{n\,\lambda_j}{(\alpha_j - 1)} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(40)$$

بتعويض ناتج المعادلات (39) و (40) في المعادلة (37) لنحصل على:

$$\mu_Y = E(Y) = [\frac{b}{(b+2)}\sum_{j=1}^{z} q_j \frac{(\lambda_j + \frac{n\,\lambda_j}{(\alpha_j - 1)})}{(\alpha_j + n - 1)} + \frac{1}{(b+2)} Ln[\sum_{j=1}^{z} q_j\,(1 - \frac{b(\lambda_j + \frac{n\,\lambda_j}{(\alpha_j - 1)})}{(\alpha_j + n - 1)})]$$

$$+ \sum_{j=1}^{z} q_j \frac{(\lambda_j + \frac{n\,\lambda_j}{(\alpha_j - 1)})^2 [(\alpha_j + n - 1) - \sum_{j=1}^{z} q_j (\alpha_j + n - 2)]}{(\alpha_j + n - 1)^2 (\alpha_j + n - 2)}]$$

علماً أن:

$$q_j = E(P_j) = \frac{\gamma_j \lambda_j^{\alpha_j} \beta_j^n\,(\frac{n\,\lambda_j}{(\alpha_j - 1)})}{\Gamma\alpha_j} \frac{\Gamma(\alpha_j + n)}{(\lambda_j + \frac{n\,\lambda_j}{(\alpha_j - 1)})^{(\alpha_j + n)}} \Bigg/ \sum_{j=1}^{z} \frac{\gamma_j \lambda_j^{\alpha_j} \beta_j^n\,(\frac{n\,\lambda_j}{(\alpha_j - 1)})}{\Gamma\alpha_j} \frac{\Gamma(\alpha_j + n)}{(\lambda_j + \frac{n\,\lambda_j}{(\alpha_j - 1)})^{(\alpha_j + n)}}$$

وعليه فان:

$$E(TC_{(n)}) = C_0 + C\,n + k\,b\ \mu_Y \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(41)$$

) سوف يتم استخدام الطرق العددية NLINEXلغرض الحصول على حجم العينة الأمثل تحت دالة الخسارة (للوصول إلى الهدف المطلوب نسبةً إلى مقدر بيز لـ θ .

) بالشكل التالي:NLINEX تحت دالة خسارة (β حسب المعادلة (7) نسبةً إلى $TC_{(n)}$أما دالة الكلفة الكلية

$$TC_{(n)} = C_0 + C\,n + PR_{NLINEX} = C_0 + C\,n + k\,b\,[m_\beta - \hat{\beta}_{NLINEX} + Var(\beta \,|\, \underline{X})]$$

$$TC_{(n)} = C_0 + C\,n + k\,b\,[\sum_{j=1}^{z}\beta_j\ P_j - [\frac{-1}{(b+2)} Ln[\sum_{j=1}^{z} e^{-b\beta_j}\ P_j] + \frac{2}{(b+2)}\sum_{j=1}^{z}\beta_j\ P_j] + \sum_{j=1}^{z}\beta_j^2\ P_j - [\sum_{j=1}^{z}\beta_j\ P_j]^2]$$

$$\therefore TC_{(n)} = C_0 + C\,n + k\,b\,[\sum_{j=1}^{z}\beta_j\ P_j + \frac{1}{(b+2)} Ln[\sum_{j=1}^{z} e^{-b\beta_j}\ P_j] - \frac{2}{(b+2)}\sum_{j=1}^{z}\beta_j\ P_j$$

$$+ \sum_{j=1}^{z}\beta_j^2\ P_j - [\sum_{j=1}^{z}\beta_j\ P_j]^2] \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(42)$$

الموضحة بالمعادلة (P_j) والمتمثلة بـW, t من خلال (Xنلاحظ من المعادلة (42) أنها تعتمد على المتغير والمعلمات المجهولة لغرض التقريب وتسهيل X(36) وباستخدامنا طريقة دالتا لغرض التخلص من المتغير الحل معتمدين فيها على النتائج التي تم الحصول عليها من المعادلة (39) و (40) بعد إدخال التوقع على المعادلة أعلاه لنحصل على:

$$\therefore E(TC_{(n)}) = C_0 + C\,n + k\,b\left[\frac{b}{(b+2)}\sum_{j=1}^{z}\beta_j\,q_j + \frac{1}{(b+2)}Ln\left[\sum_{j=1}^{z}e^{-b\beta_j}\,q_j\right] + \sum_{j=1}^{z}\beta_j^2\,q_j - \left[\sum_{j=1}^{z}\beta_j\,q_j\right]^2\right] \quad \text{.......... ....}....(42)$$

وسوف نتبع أيضاً الأسلوب العددي ؛ لغرض الحصول على حجم العينة الأمثل تحت دالة الخسارة الآسية وذلك لصعوبة الحصول على المقدر من خلال أخذ المشتقة (β) نسبةً إلى المعلمة NLINEXاللاخطية (المعادلة أعلاه ومساواتها بالصفر بشكل سهل ليوصلنا إلى الهدف المطلوب.

ثالثاً: الجانب التطبيقي

) بإحجام مختلفة Monte Carloتم في هذا الجانب توليد بيانات باستخدام المحاكاة (
) حسب توزيع ويبل مع أخذ قيم افتراضية للمعلمات الخاصة بالتوزيع فضلا" عن إعطاء n=10,50,100(
) لغرض N=1000 ومعلمة دالة الخسارة والخاصة بالتقدير وتم تكرار التجربة (α_0,β_0قيم أولية للمعلمات معلومة تحت دالة الخسارة الآسية اللاخطية β عندما تكون معلمة الشكل θالحصول على مقدرات للمعلمة
)SE) ودالة خسارة الخطأ التربيعي (LINEX) مع مقدرات تحت دالة الخسارة الآسية الخطية (NLINEX(
)) والموضحة MSEحسب المعادلات (2) و(4) و(6) مع وضع معيار للمقارنة (متوسط مربعات الخطأ (
) نسبةً إلى NLINEXفي الجدول (2) و(3) فضلاً عن تحديد حجم العينة الأمثل تحت دالة الخسارة (
في الدراسة. MAPLE و MATLABالبيانات الحقيقية، وتم استخدام برنامج

وتم أخذ بيانات حقيقية من الفحص المختبري لإنتاج شركة أربيل لصناعة الحديد الصلب من رسالة ماجستير(مروان طارق، 2011) وهذه البيانات خاصة بالسيطرة على إجهاد الخضوع (إجهاد n=100المضغوط) على مادة الحديد من عينات الفحص للفترة من 2010/6/9 إلى2010/11/12 قوامها
) واختبرت Mpaتم تقليل وحدة القياس بقسمة البيانات على 1000 علماً أن وحدة القياس ميكاباسكال (
)؛ لغرض التأكد على ملائمتها لتوزيع ويبل وفق Easy Fittingالبيانات باستخدام برنامج (
) ضد فرضية العدم (البيانات تتبع توزيع H1الفرضية البديلة (البيانات لا تتبع توزيع ويبل:
Kolmogorov–Smirnov & Chi–) بالاعتماد على اختبار حسن المطابقة لـ (H0ويبل:

والموضحة في الجدول (1) والتي أكدت ملائمة البيانات للتوزيع (Squared (Gibb. & Sub., 2003 (عند مقارنة القيمة المحسوبة للاختبار مع القيمة الحرجة وبمستويات معنوية مختلفة وكانت معلمة الشكل $\beta = 0.45571$ مع اخذ قيمة افتراضية لكلفة المعاينة $\alpha_0 = 20 , \beta_0 = 40$ للبيانات وتم أخذ القيم الأولية لـ C=0.001. لكل وحدة هي

جدول رقم (1)

يوضح اختبار لبيانات الفحص لمادة السمنت وملائمتها مع توزيع ويبل

Kolmogorov−Smirnov=0.05326 , P−Value=0.92466					
مستوى المعنوية	0.2	0.1	0.05	0.02	0.01
Critical Value القيمة الحرجة	0.10563	0.12067	0.13403	0.14987	0.16081
Chi−Squared=2.0619 , Deg. of freedom=6 , P−Value=0.91392					
Critical Value القيم الحرجة	8.5581	10.645	12.592	15.033	16.812

جدول رقم (2)

مقارنة مقدرات بيز تحت دالة الخسارة (SE) و(NLINEX) و(LINEX) بقيم أولية ($\alpha_0 \geq \beta_0$)

		$\theta=1 \quad k=1$				$\theta=1 \quad k=2$		
N	b	معيارالمقارنة	$\hat{\theta}_{SE}$	$\hat{\theta}_{NLINIXE}$	$\hat{\theta}_{LINIXE}$	$\hat{\theta}_{SE}$	$\hat{\theta}_{NLINIXE}$	$\hat{\theta}_{LINIXE}$

10	−3		0.9698	2.1724	1.3707	0.9490	2.0797	1.3259
		MSE	0.0037	2.0469	0.1907	0.0035	1.8767	0.1748
	−1		0.9605	0.9015	1.0195	0.9439	0.8878	1.0000
		MSE	0.0037	0.0178	0.0004	0.0033	0.0156	0.0004
	1		1.0955	1.0807	1.0511	0.9542	0.9425	0.9192
		MSE	0.0091	0.0072	0.0061	0.0035	0.0058	0.0192
	2		0.9660	0.7808	0.5956	0.9576	0.7934	0.6292
		MSE	0.0016	0.0418	0.1539	0.0015	0.0506	0.1947
	3		0.9417	0.1070	−0.4495	0.9672	0.0689	−0.5300
		MSE	0.0001	0.0253	0.0681	0.0001	0.0205	0.0554
50	−3		0.9877	1.0847	1.0200	0.9908	1.0885	1.0234
		MSE	0.0001	0.0082	0.0005	0.0001	0.0084	0.0006
	−1		0.9903	0.9801	1.0004	0.9872	0.9771	0.9973
		MSE	0.0001104	0.0004417	0.0000018	0.0001096	0.0004387	0.0000020
	1		0.9863	0.9831	0.9767	0.9901	0.9869	0.9805
		MSE	0.0001099	0.0001897	0.0004153	0.0001110	0.0001915	0.0004190
	2		0.9910	0.9816	0.9722	0.9850	0.9757	0.9664
		MSE	0.0001095	0.0004041	0.0008861	0.0001059	0.0003925	0.0008621
	3		0.9924	0.9758	0.9648	0.9877	0.9713	0.9603
		MSE	0.0001	0.0008	0.0015	0.0001	0.0007	0.0015
100	−3		0.9999	1.0471	1.0157	0.9908	1.0372	1.0063
		MSE	0.00001	0.0018	0.0001	0.00001	0.0018	0.0001
	−1		0.9990	0.9939	1.0041	0.9949	0.9898	0.9999
		MSE	0.0000269	0.0001072	0.0000002	0.0000263	0.0001052	0.0000002
	1		1.0007	0.9991	0.9958	0.9960	0.9944	0.9911
		MSE	0.000027	0.000047	0.000105	0.000026	0.000046	0.000103

			4	8	8	6	6	3
	2	MSE	0.9953 0.000026 7	0.9904 0.000102 0	0.9856 0.000226 3	0.9935 0.000026 0	0.9887 0.000099 9	0.9839 0.000221 9
	3	MSE	0.9936 0.000026 3	0.9850 0.000192 0	0.9793 0.000387 4	1.0004 0.000027 2	0.9917 0.000197 4	0.9859 0.000398 0

جدول رقم (3)

($\alpha_0 < \beta_0$) بقيم أولية (SE) و(NLINEX) و LINEX مقارنة مقدرات بيز تحت دالة الخسارة)

			$\theta = 2 \quad k = 1$			$\theta = 3 \quad k = 2$		
n	b	معيارالمقارنة	$\hat{\theta}_{SE}$	$\hat{\theta}_{NLINIXE}$	$\hat{\theta}_{LINIXE}$	$\hat{\theta}_{SE}$	$\hat{\theta}_{NLINIXE}$	$\hat{\theta}_{LINIXE}$
10	−3	MSE	2.1365 0.0233	6.6935 22.9398	3.6555 2.7966	2.9877 0.0174	8.4275 30.0429	4.8010 3.3343
	−1	MSE	2.1593 0.0228	1.6587 0.3888	2.6599 0.5101	3.0447 0.0172	1.6955 3.0475	4.3939 2.5094
	1	MSE	2.1257 0.0232	1.7470 0.1143	0.9897 0.8226	2.9825 0.0057	1.3708 0.0521	−1.8526 0.4466
	2	MSE	2.1490 0.0020	−0.4044 0.0029	−2.9579 0.0102	3.0215 0.0001	−0.9013 0.0005	−4.8241 0.0012
	3	MSE	2.1179 0.0001	−1.2128 0.0036	−3.4333 0.0224	2.9719 0.00001	−1.6067 0. 0005	−4.6591 0.0008
50	−3	MSE	2.0286 0.0009	2.4886 0.2571	2.1819 0.0348	3.0077 0.0002	4.9022 7.2315	3.6392 0.7945
	−1	MSE	2.0387 0.0009	1.9942 0.0007	2.0832 0.0054	2.9880 0.0002	2.8893 0.0114	3.0867 0.0101
	1	MSE	2.0300 0.0009142	2.0169 0.0003897	1.9906 0.0004449	3.0139 0.0002	2.9857 0.0012	2.9292 0.0084
	2	MSE	2.0285 0.0009	1.9910 0.0004	1.9535 0.0029	3.0103 0.0001	2.8561 0.0873	2.7019 0.3435
	3	MSE	2.0284 0.0009	1.8896 0.0764	1.7971 0.2158	3.0007 0.0001	0.0683 0.2156	−1.8866 0.6039
100	−3	MSE	2.0153 0.0001	2.2160 0.0456	2.0822 0.0060	3.0351 0.0009	3.5213 0.2779	3.1972 0.0380
	−1	MSE	2.0082 0.0001058	1.9874 0.0001673	2.0291 0.0009448	3.0427 0.0009	2.9936 0.0005	3.0918 0.0063
	1	MSE	2.0111 0.0001062	2.0045 0.0000299	1.9913 0.0001494	3.0002 0.0001	2.9857 0.0003	2.9567 0.0021
	2	MSE	2.0190 0.0001032	1.9996 0.0001386	1.9801 0.0009567	3.0287 0.0008946	3.0138 0.0002432	2.9840 0.0003252

	3	MSE	2.0184 0.0001	1.9843 0.0007	1.9616 0.0024	3.0430 0.0009	2.9995 0.0003	2.9561 0.0036

جدول رقم (4)

مقارنة مقدرات بيز عند حجم العينة n=100 تحت مادة السمنت وحجم العينة الأمثل والخاصة بفحص دالة الخسارة (SE) و(NLINEX) و(LINEX)

		$\beta=0.45571\ \alpha_0=20\ \ \beta_0=40\ n=100\qquad C=0.001$							
k	B	معيار المقارنة	$\hat{\theta}_{SE}$	$\hat{\theta}_{NLINIXE}$	$\hat{\theta}_{LINIXE}$	n^*	$\hat{\hat{\theta}}_{SE}$	$\hat{\hat{\theta}}_{NLINIXE}$	$\hat{\hat{\theta}}_{LINIXE}$
1	−1	MSE	0.9223 0.2369	0.9187 0.2333	0.9260 0.2405	19	1.3965 0.9696	1.3687 0.9141	1.4243 1.0267
	1	MSE	0.9223 0.2369	0.9211 0.2357	0.9188 0.2334	49	1.0895 0.4332	1.0866 0.4293	1.0808 0.4217
	2	MSE	0.9223 0.2369	0.9188 0.2334	0.9153 0.2300	77	0.9756 0.2927	0.9707 0.2874	0.9658 0.2822
	3	MSE	0.9223 0.2369	0.9160 0.2308	0.9119 0.2267	99	0.9244 0.2389	0.9180 0.2327	0.9137 0.2286

الاستنتاجات

1- دالة الخسارة (NLINEX) غير المتماثلة المقترحة من قبل (Saiful Islam,Roy and Ali, 2004) لها فائدة في تقدير معلمة توزيع ويبل بأسلوب بيز وهو يؤكد إيجاد مقدر متوازن بين دالة الخسارة (LINEX) و(SE)والموضحة في النتائج أعلاه.

2- تم تقدير معلمة القياس θ تحت دالة الخسارة (NLINEX) غير المتماثلة لتوزيع ويبل عندما تكون معلمة الشكل β معلومة وعندما تكون معلمتي توزيع ويبل غير معلومة.

3- الحصول على مقدرات أكثر كفاءة باستخدام دالة الخسارة (NLINEX) من دوال الخسارة (LINEX) و(SE) لحصولنا على متوسط مربعات خطأ (MSE) اقل والموضحة في الجدول (3).

4- عدم الحصول على مقدرات جيدة عند استخدام دالة الخسارة (NLINEX) عندما تكون قيم b سالبة وحجم عينة صغير والموضحة في الجدول (2) و(3).

5- يكون ذات كفاءة لحصولها على متوسط مربعات خطأ (SE) مقدر بيز تحت دالة الخسارة (MSE) اقل بحجم العينة صغير أو كبير في معظم الحالة عند عملية التقدير معلمة القياس لتوزيع ويبل عند توفر المعلومات حول المعلمة (θ) (Informative).

6- تم تقدير معلمة القياس لتوزيع ويبل تحت دالة الخسارة (NLINEX) للبيانات الحقيقية والتي تمثل الفحص لمادة السمنت والموضحة في الجدول (4) بعد التأكد من ملائمة البيانات للتوزيع وفق اختبار حسن المطابقة لـ (Kolmogorov-Smirnov & Chi-Squared).(1) والموضحة في الجدول (1)

7- بعد ايجاد (NLINEX) من المعادلة (21) و (42) تم تحديد حجم العينة الأمثل تحت دالة خسارة مقدر بيز تحت نفس الدالة وفق النقطة (2) وتم التوصل إلى حجم العينة الأمثل عندما تكون معلمة الشكل معلومة لتوزيع ويبل بالاعتماد على البيانات الحقيقية وفق النقطة (6).

المصادر

اولا: العربية

1. أمير حنا هرمز،(1990)،"الإحصاء الرياضي"،مديرية دار الكتب للطباعة والنشر جامعة الموصل- العراق.
2. الخياط،باسل يونس ذنون،(1991)،"الاحتمالية والمتغيرات العشوائية", مديرية دار الكتب للطباعة والنشر , جامعة الموصل.
3. الراوي، واثق ناظم دهام،(2013)،"تحديد حجم العينة البيزي لمعلمتي التوزيع الطبيعي مع التطبيق على بيانات الشركة العامة للفوسفات/القائم"، رسالة ماجستير غير منشورة، قسم الإحصاء والمعلوماتية، كلية علوم الحاسوب والرياضيات-جامعة الموصل،العراق.
4. عبد الجبار خضر بخيت،سعد احمد عبد الرحمن وخيرية سلمان حسن،(2011)،"مقارنة ثلاثة مقدرات مختلفة لمعلمة القياس لتوزيع ويبل ذي المعلمتين وقياس كفاءة المقدرات باستخدام المحاكاة"، عدد خاص بوقائع المؤتمر العلمي الرابع كلية علوم الحاسوب والرياضيات، المجلة العراقية للعلوم الإحصائية، جامعة الموصل، العراق العدد(20) 105-124.
5. مروان طارق حسن،(2011)،"تكوين لوحتي ويبل للسيطرة على معدل إجهاد الخضوع للحديد الصلب مع التطبيق في شركة أربيل لصناعة الحديد الصلب"، رسالة ماجستير غير منشورة، قسم الإحصاء، كلية الإدارة والاقتصاد-جامعة صلاح الدين,العراق.

ثانيا: الاجنبيه

6. Ahmad, K.,(2013),"Bayesian Analysis of Weibull distribution and ITS Applications", Master of philosophy, Department of Statistics, University of Kashmir, India.
7. Bernardo, J.M. and Smith, A.F.M.,(1994),"Bayesian theory", Chichester, U.K.: John Wiley.
8. Box, G. E. P. and Tiao, G. C., (1973), "Bayesian Inference in Statistical Analysis", Addition –Wesley Publishing Company, California, London.
9. DeGroot, M.H.,(1970),"Optimal statistical decisions", Mc Graw-Hill Inc.
10. Gibbons, J.D., and S. Chakraborti, (2003)," Nonparametric Statistical", Inference (Fourth Edition). Marcel Dekker, Inc., New York.
11. Lindley, D.V.,(1972),"Bayesian statistics a Review", Philadelphia Society for Industrial and Applied Mathematics.
12. Morteza,S.M., Farhad,Y.and Manoochehr, B.,(2012),"Inference for Lomax Distribution under Generalized Order Statistics",Applied Mathematical Sciences, Vol. (6), No. (105), pp 5241 – 5251.
13. Press, S.J.,(2003),"Subjective and Objective Bayesian statistics", A John Wiley and sons.
14. Rinne, H.,(2009),"The Weibull distribution", CRC press Tayhor&Francis group Boca Raton London New york.
15. Saiful Islam, A.F.M., Roy, M. and Ali, M.M.,(2004),"A Non-Linear exponential (NLINEX) Loss function in Bayesian", Journal of the Korean Data and information science society, Vol. (15), No. (4), pp 899-910.
16. Saiful Islam, A.F.M.,(2011),"Loss function, Utility function and Bayesian sample size determination", Ph.D. thesis, University of London.
17. Soland, R.M.,(1969),"Bayesian Analysis of the Weibull Process with Unknown Scale and Shape and Parameter", IEEE Trans, Reliab., Vol. (R-18), pp 181-184.
18. Varian, H.R.,(1975),"A Bayesian approach estate assessment", in studies in Bayesian Econometrics and statistics in Honour of Leonard J. sarage. eds. Stephen E. Fienberg Arnold Zellner. Amsterdam, North Holland, 195-805.
19. Zellner, A.,(1986),"Bayesian estimation & prediction Using Asymmetric loss function", Journal of American statistics Association, Vol. (81), No. (394), pp 446-451.